1988 年京大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

各点の、原点 O を基準とした位置ベクトルを考えると

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$$

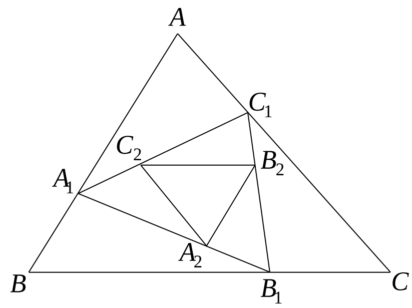
$$\overrightarrow{OC_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}$$

これより

$$\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OB_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{C_2A_2}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OC_2}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$



$A_2B_2 \parallel AB,\ B_2C_2 \parallel BC,\ C_2A_2 \parallel CA$ であるから、$\triangle A_2B_2C_2$ は $\triangle ABC$ に相似である。（証明終）