

1989 年京大後期理(理学部以外) [1] 文 [2] 共通

(1)

$m=11a+b$, $n=3a+b$ より

$m-n=8a$ は、 m, n の最大公約数で割り切れる。 $11n-3m=8b$ は、 m, n の最大公約数で割り切れる。

したがって、 m, n の最大公約数は、 $8a, 8b$ の公約数である。

a, b の最大公約数 d は奇数であり、 m, n は偶数であるから、

m, n の最大公約数は、 $2d, 4d, 8d$ のいずれかである。(証明終)

(2)

m, n がともに平方数であると仮定する。 m, n は偶数であるから、偶数の 2 乗でなければならない。

$m=(2k)^2=4k^2$, $n=(2l)^2=4l^2$ ($k>l$) とおける。

$$(1) \text{ より } a = \frac{m-n}{8} \text{ であり、 } a = \frac{4(k^2-l^2)}{8} = \frac{(k+l)(k-l)}{2}$$

ここで、 k, l の奇偶が異なるとき、 $k+l, k-l$ はいずれも奇数であり、 a が整数にならない。

k, l の奇偶が一致するとき、 $k+l, k-l$ はいずれも偶数であり、 $(k+l)(k-l)$ は 4 の倍数である。

このとき、 a は偶数になり、 a が奇数であることに矛盾する。

以上により、 m, n がともに平方数であるという仮定は誤りであり、題意は示された。(証明終)