1989 年京大文 $\boxed{1}$

（必要性）

正方形 D の 4 頂点 $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の、一次変換 f による像は、

それぞれ $(a+b,\ c+d), (a-b,\ c-d), (-a+b,\ -c+d), (-a-b,\ -c-d)$ である。

これらがすべて、正方形 D に含まれることが条件であるから

$-1 \leqq a+b \leqq 1, -1 \leqq c+d \leqq 1$ ——① $-1 \leqq a-b \leqq 1, -1 \leqq c-d \leqq 1$ ——②

$-1 \leqq -a+b \leqq 1, -1 \leqq -c+d \leqq 1$ ——③ $-1 \leqq -a-b \leqq 1, -1 \leqq -c-d \leqq 1$ ——④

①と④、②と③は同値であるから、①と③が成立すればよく、

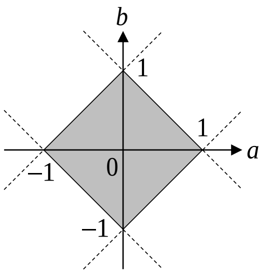
$-a-1 \leqq b \leqq -a+1,\ a-1 \leqq b \leqq a+1$

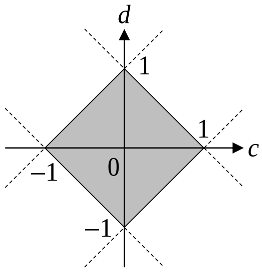
$-c-1 \leqq d \leqq -c+1,\ c-1 \leqq d \leqq c+1$

これを ab 平面、 cd 平面に図示すると、右図のようになり、

境界線を含む。

この存在範囲は、$|a|+|b| \leqq 1$ かつ $|c|+|d| \leqq 1$ と同値である。





（十分性）

$|a|+|b| \leqq 1$ かつ $|c|+|d| \leqq 1$ であるとき、$-1 \leqq a \leqq 1, -1 \leqq c \leqq 1$ であり、

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき $-a-1 \leqq b \leqq a+1$ 、$0 \leqq a \leqq 1$ のとき $a-1 \leqq b \leqq -a+1$

$-1 \leqq c \leqq 0$ のとき $-c-1 \leqq d \leqq c+1$、$0 \leqq c \leqq 1$ のとき $c-1 \leqq d \leqq -c+1$

上記の①と③が成り立てばよい。

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$-1 \leqq a+b \leqq 2a+1$　$-1 \leqq 2a+1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq a+b \leqq 1$ が成立。

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$2a-1 \leqq a+b \leqq 1$　$-1 \leqq 2a-1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq a+b \leqq 1$ が成立。

$-1 \leqq c \leqq 0$ のとき　$-1 \leqq c+d \leqq 2c+1$　$-1 \leqq 2c+1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq c+d \leqq 1$ が成立。

$0 \leqq c \leqq 1$ のとき　$2c-1 \leqq c+d \leqq 1$　$-1 \leqq 2c-1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq c+d \leqq 1$ が成立。

したがって、①が成立。

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$-2a-1 \leqq -a+b \leqq 1$　$-1 \leqq -2a-1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq -a+b \leqq 1$ が成立。

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$-1 \leqq -a+b \leqq -2a+1$　$-1 \leqq -2a+1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq -a+b \leqq 1$ が成立。

$-1 \leqq c \leqq 0$ のとき　$-2c-1 \leqq -c+d \leqq 1$　$-1 \leqq -2c-1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq -c+d \leqq 1$ が成立。

$0 \leqq c \leqq 1$ のとき　$-1 \leqq -c+d \leqq -2c+1$　$-1 \leqq -2c+1 \leqq 1$ であるから、$-1 \leqq -c+d \leqq 1$ が成立。

したがって、③が成立。

以上により示された。（証明終）