1989 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

$y = x^3 - ax$ 上の点 $P(c,\ c^3 - ac)$ における接線 T_P の方程式は　$y = (3c^2 - a)(x - c) + c^3 - ac = (3c^2 - a)x - 2c^3$

$x^3 - ax = (3c^2 - a)x - 2c^3$ とすると　$x^3 - 3c^2 x + 2c^3 = (x - c)^2 (x + 2c) = 0$

したがって、Q の座標は　$\therefore (-2c,\ -8c^3 + 2ac)$ ……(答)

(2)

$P(c,\ c^3 - ac)$ としたとき、T_P の傾きは $3c^2 - a$ である。

$Q(-2c,\ -8c^3 + 2ac)$ における接線 T_Q の傾きは　$3(-2c)^2 - a = 12c^2 - a$

T_P と T_Q が直交するとき　$(3c^2 - a)(12c^2 - a) = -1$　$36c^4 - 15ac^2 + a^2 + 1 = 0$ ――①

c に関する 4 次方程式①の、相違なる実数解の個数が、求める個数である。

2 次関数 $f(t) = 36t^2 - 15at + a^2 + 1$ について、$f(t) = 0$ の非負実数解の個数を調べる。

$f(0) = a^2 + 1 > 0$ であるから、$t = 0$ は解ではない。$f(t) = 0$ が正の実数解を持つには、

$f(t) = 36\left(t - \frac{5}{24}a\right)^2 - \frac{9}{16}a^2 + 1$ であり、軸 $\frac{5}{24}a$ は正であるから　$\therefore a > 0$

$a > 0$ の条件下で、$f(t) = 0$ の正の実数解の個数を考えると

$f\left(\frac{5}{24}a\right) = -\frac{9}{16}a^2 + 1 = \frac{9}{16}\left(\frac{16}{9} - a^2\right) < 0$　$a > \frac{4}{3}$ のとき　2 個。

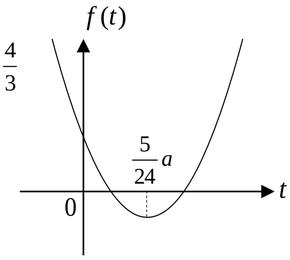
$f\left(\frac{5}{24}a\right) = 0$　$a = \frac{4}{3}$ のとき　1 個。

$f\left(\frac{5}{24}a\right) > 0$　$a < \frac{4}{3}$ のとき　0 個。

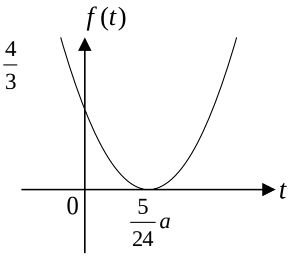
$a \leqq 0$ のときとまとめて、求める個数は

$a < \frac{4}{3}$ のとき 0 個、$a = \frac{4}{3}$ のとき 2 個、$a > \frac{4}{3}$ のとき 4 個 ……(答)

$a > \frac{4}{3}$



$a = \frac{4}{3}$



$0 < a < \frac{4}{3}$