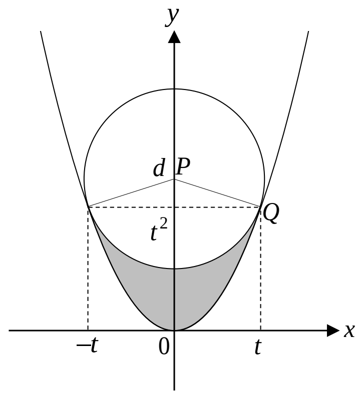
1989年京大後期理(理学部以外) $\boxed{2}$

$y=x^2$ に接する、半径 r の円の中心を $P(0,d)$ 、接点を $Q(t,t^2)$ $(t>0)$ とすると
$\overline{PQ}$ の最小値が r に一致するので



$$\overline{PQ}=\sqrt{t^2+(t^2-d)^2}=\sqrt{t^4-(2d-1)t^2+d^2}=\sqrt{\left\{t^2-\left(d-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+d-\frac{1}{4}}$$

$d>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\overline{PQ}$ は $t^2=d-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{d-\dfrac{1}{4}}$ をとるから

$$r=\sqrt{d-\frac{1}{4}}\qquad d=r^2+\frac{1}{4}\qquad t^2=r^2-\frac{1}{4}>0$$

したがって、 $P\left(0,\ r^2+\dfrac{1}{4}\right)$、$Q\left(\sqrt{r^2-\dfrac{1}{4}},\ r^2-\dfrac{1}{4}\right)$ と定まる。

求める体積は、右図の網掛部を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積に等しい。

円の方程式は、 $x^2+(y-d)^2=r^2$ であるから、求める体積は

$$\pi\int_0^{t^2}ydy-\pi\int_{d-r}^{t^2}\left\{r^2-(y-d)^2\right\}dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{t^2}-\pi\left[r^2y-\frac{(y-d)^3}{3}\right]_{d-r}^{t^2}=\pi\frac{t^4}{2}-\pi\left\{r^2(t^2-d+r)-\frac{(t^2-d)^3}{3}-\frac{r^3}{3}\right\}$$

$$=\pi\frac{1}{2}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)^2-\pi\left\{r^2\left(r-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{r^3}{3}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}\left(r^4-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{16}\right)-r^3+\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}r^3\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{4}r^2-\frac{1}{96}\right)=\frac{\pi}{2}\left(r-\frac{1}{2}\right)^3\left(r+\frac{1}{6}\right)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

1989年京大後期理（理学部）$\boxed{2}$

(1)

$a,\ b$ は互いに素であるから、線分 OA 上および線分 CB 上には、両端を除き格子点は存在しない。

平行四辺形 $OABC$ の周および内部と、直線 $x=t\ (t=1,\ 2,\ \cdots,\ a-1)$ との共通部分は、長さ1の線分であり、

$$\frac{b}{a}t \leqq y \leqq \frac{b}{a}t+1$$

で与えられる。この両端は自然数ではなく、この範囲に必ず1個の自然数が存在する。

したがって、平行四辺形 $OABC$ の内部の格子点の個数は　$\therefore a-1$ 個　……(答)

(2)

格子点 P_t は、$\left(t,\ \left[\frac{b}{a}t\right]+1\right)\ (t=1,\ 2,\ \cdots,\ a-1)$ で与えられる。$\left[\frac{b}{a}t\right]$ は、$\frac{b}{a}t$ を超えない最大の整数である。

$d_t=\left[\frac{b}{a}t\right]+1-\frac{b}{a}t$ とすると、$\frac{1}{a}\leqq d_t\leqq\frac{a-1}{a}$ であり、$\triangle OP_tA$ の面積は　$\frac{1}{2}ad_t$

これが最小になるのは、d_t の値が最小のときである。

ここで、$a\geqq 3$ のとき、d_t は、$a-1$ 個の値 $\frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \cdots,\ \frac{a-1}{a}$ のすべてをとり得ることを示す。

今、$t=p$ および $t=q$ において $(1\leqq p<q\leqq a-1)$ 、d_t が重複した値 $\frac{r}{a}\ (1\leqq r\leqq a-1)$ をとると仮定する。

このとき、$m,\ n\ (m<n)$ を整数として、$m=\frac{b}{a}p+\frac{r}{a},\ n=\frac{b}{a}q+\frac{r}{a}$ とおける。辺々引くと

$$n-m=\frac{b}{a}(q-p)\qquad a(n-m)=b(q-p)$$

a と b は互いに素であるから、$q-p$ は a の倍数である。

ところが、$1\leqq q-p\leqq a-2$ であるから、$q-p$ は a の倍数ではない。

したがって、d_t が重複した値をとるという仮定は誤りであり、$d_t=\frac{1}{a}$ となる t が必ず存在する。

$a=2$ のとき　b は奇数であるから、$d_1=\left[\frac{b}{2}\right]+1-\frac{b}{2}=\frac{b-1}{2}+1-\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$

以上により、$a\geqq 2$ において、求める最小値は　$\therefore \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$　……(答)