

1989 年京大後期理(理学部以外) [3] 文 [3] 共通

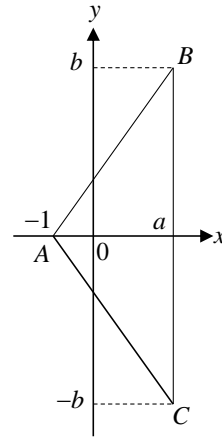
$B(a, b), C(a, -b)$ ($a > 0, b > 0$) とする。

$AB = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$ であり、 $AD:DB = 1:a$ であるから

$$DB = \frac{a}{a+1} AB = \frac{a}{a+1} \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 2\sqrt{3}$$

$$DB^2 = \frac{a^2}{(a+1)^2} \{(a+1)^2 + b^2\} = a^2 \left\{ 1 + \frac{b^2}{(a+1)^2} \right\} = 12$$

$$1 + \frac{b^2}{(a+1)^2} = \frac{12}{a^2} \quad b^2 = \frac{12-a^2}{a^2} (a+1)^2 \quad \therefore b = \frac{a+1}{a} \sqrt{12-a^2}$$



$\triangle ABC$ の面積は $S = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (a+1) = \frac{(a+1)^2}{a} \sqrt{12-a^2}$

$\triangle ABC$ の H に属さない部分の面積は、相似性より $\frac{S}{(a+1)^2}$ であるから

$\triangle ABC$ と H の共通部分の面積は $\left\{ 1 - \frac{1}{(a+1)^2} \right\} S = \frac{\{(a+1)^2 - 1\}}{a} \sqrt{12-a^2} = (a+2) \sqrt{12-a^2}$

$f(a) = (a+2)^2 (12-a^2)$ として、 $0 < a < 2\sqrt{3}$ における増減を調べる。

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2(a+2)(12-a^2) - 2a(a+2)^2 = 2(a+2)(12-a^2 - a^2 - 2a) \\ &= 4(a+2)(6-a-a^2) = 4(a+2)(3+a)(2-a) \end{aligned}$$

$f(a)$ の増減は右の通りで、 $a=2$ において極大。

$f(2) = 4^2 \cdot 8 = 8^2 \cdot 2$ であるから

求める最大値は $\therefore 8\sqrt{2}$ ……(答)

a	0	…	2	…	$2\sqrt{3}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗		↘	

1989 年京大後期理(理学部) ③

$6 < \alpha + \beta < 8, 5 < \alpha\beta < 12$ であるから、解と係数の関係より $6 < \frac{b}{a} < 8, 5 < \frac{3c}{a} < 12$

$6 < \frac{b}{a} < 8$ より $a=1$ のとき $6 < b < 8 \therefore b=7$ $a \geq 2$ のとき $12 \leq 6a < b$ より、不適。

したがって $a=1$ しかあり得ないので $5 < 3c < 12 \quad \frac{5}{3} < c < 4 \quad c=2, 3$ のいずれかである。

$c=2$ のとき $ax^2 - bx + 3c = x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0 \quad x=1, 6$ は不適。

$c=3$ のとき $ax^2 - bx + 3c = x^2 - 7x + 9 = 0 \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\frac{7-4}{2} < \frac{7-\sqrt{13}}{2} < \frac{7-3}{2}$ より $\therefore \frac{3}{2} < \frac{7-\sqrt{13}}{2} < 2 \quad \frac{7+3}{2} < \frac{7+\sqrt{13}}{2} < \frac{7+4}{2}$ より $\therefore 5 < \frac{7+\sqrt{13}}{2} < \frac{11}{2}$

したがって、 $\alpha = \frac{7-\sqrt{13}}{2}, \beta = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ は、 $1 < \alpha < 2, 5 < \beta < 6$ を満たす。

以上により $\therefore a=1, b=7, c=3 \dots\dots$ (答)