1989 年京大理 $\boxed{2}$

各 $a_i\ (1\leqq i\leqq n)$ について、$a_i\leqq\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)-a_i}{n-1}$ が成り立つ。

両辺に $\dfrac{a_i}{n-1}$ を足すと $\dfrac{n}{n-1}a_i\leqq\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_k$ $\quad\therefore a_i\leqq\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ (1\leqq i\leqq n)$ ――①

ここで、$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n$ とする。

$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq a_n$ であり、①より $a_n\leqq\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ であるから $\quad\therefore a_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$

$a_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq\dfrac{(n-1)a_{n-1}+a_n}{n}$ より $\quad na_n\leqq(n-1)a_{n-1}+a_n\quad (n-1)a_n\leqq(n-1)a_{n-1}\quad\therefore a_n\leqq a_{n-1}$

$a_{n-1}\leqq a_n$ であるから $\quad\therefore a_{n-1}=a_n$

$a_{n-1}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq\dfrac{(n-2)a_{n-2}+2a_{n-1}}{n}$ より $\quad na_{n-1}\leqq(n-2)a_{n-2}+2a_n\quad (n-2)a_{n-1}\leqq(n-2)a_{n-2}\quad\therefore a_{n-1}\leqq a_{n-2}$

$a_{n-2}\leqq a_{n-1}$ であるから $\quad\therefore a_{n-2}=a_{n-1}=a_n$

以下、同様の操作を繰り返すことにより、$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n$ が導かれる。

$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n=a$ とすると、$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{na}{n}=a$ であるから、確かに①が成立。

求める組は、$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n$ であるような組すべてである。……(答)