1989年京大理$\boxed{3}$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\neq 0)$ とする。 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ より

$$f(x)=\left(ax^2+\frac{2}{3}bx+\frac{1}{3}c\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\left(\frac{2}{3}c-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}=\frac{1}{3}f'(x)\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\left(\frac{2}{3}c-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

条件により　$\dfrac{2}{3}c-\dfrac{2b^2}{9a}=0$　$\therefore c=\dfrac{b^2}{3a}$

このとき　$f'(x)=3ax^2+2bx+\dfrac{b^2}{3a}=3a\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^2$

$a>0$ のとき、 $f'(x)\geqq 0$ であり、 $f(x)$ は単調増加。
$a<0$ のとき、 $f'(x)\leqq 0$ であり、 $f(x)$ は単調減少。
いずれにしても、 $y=f(x)$ のグラフと、 x 軸との交点は、ただ1つである。
すなわち、 $f(x)=0$ を満たす実数 x は、ただ1つである。（証明終）

※ $f(x)$ は実数係数であると見なした。問題文に明記されていないのが気になるが…。