1989年京大理 $\boxed{4}$

座標空間において、 $A(a,\ 0,\ 0),\ B(0,\ b,\ 0),\ C(0,\ 0,\ c)$ としても一般性を失わない。

$G\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$ であるから、$\overrightarrow{OG}$ に平行なベクトルの1つは $(4a,\ 4b,\ 4c)$

G を通り、$\overrightarrow{OG}$ に垂直な平面 α の方程式は

$$4a\left(x-\frac{a}{4}\right)+4b\left(y-\frac{b}{4}\right)+4c\left(z-\frac{c}{4}\right)=0 \qquad \therefore 4ax+4by+4cz=a^2+b^2+c^2$$

α と x 軸、 y 軸、 z 軸の交点を、それぞれ $P,\ Q,\ R$ とすると

$$P\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4a},\ 0,\ 0\right),\ Q\left(0,\ \frac{a^2+b^2+c^2}{4b},\ 0\right),\ R\left(0,\ 0,\ \frac{a^2+b^2+c^2}{4c}\right)$$

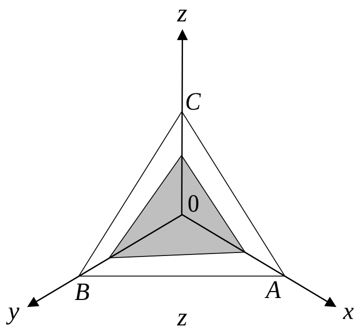
$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4a}>a$ とすると　$a^2+b^2+c^2>4a^2$　$\therefore 3a^2<b^2+c^2$ ——①

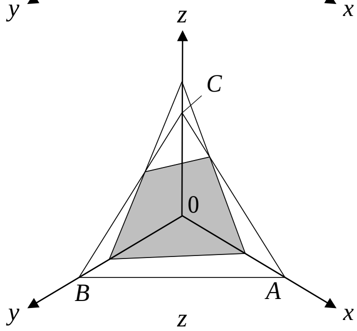
同様に、$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4b}>b$ とすると　$3b^2<c^2+a^2$ ——②　$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4c}>c$ とすると　$3b^2<c^2+a^2$ ——③

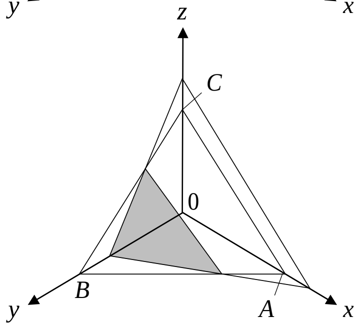
①～③を辺々足すと、$3(a^2+b^2+c^2)<2(a^2+b^2+c^2)$ となり、不適。①～③が同時に成立することはない。

①～③のうち、成立するのは最大で2つである。

それぞれの場合について、α による四面体の切り口を考えると、







3つの関係式 $3a^2<b^2+c^2,\ 3b^2<c^2+a^2,\ 3c^2<a^2+b^2$ のうち、

いずれか1つだけが成立するとき、切り口は四角形になる。

その他のとき、切り口は三角形になる。

$a=7,\ b=8,\ c=9$ のとき、$a^2=49,\ b^2=64,\ c^2=81$ であるから

$$3a^2=147>64+81=b^2+c^2$$
$$3b^2=192>81+49=c^2+a^2$$
$$3c^2=243>49+64=a^2+b^2$$

$3a^2<b^2+c^2,\ 3b^2<c^2+a^2,\ 3c^2<a^2+b^2$ はすべて成立しない。

点 $P,\ Q,\ R$ は、それぞれ辺 $OA,\ OB,\ OC$ 上にあるから、四面体の体積は

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{4a}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{4b}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{4c}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{384abc}$$

α と原点の距離は　$\dfrac{\left|a^2+b^2+c^2\right|}{4\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{4}$

△ PQR の面積を S とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{4} \qquad \therefore S=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{32abc}$$

$a=7,\ b=8,\ c=9$ を代入すると　$\therefore S=\dfrac{194^2\sqrt{194}}{32\cdot7\cdot8\cdot9}=\dfrac{97^2\sqrt{194}}{8\cdot7\cdot8\cdot9}=\dfrac{9409\sqrt{194}}{4032}$　……(答)