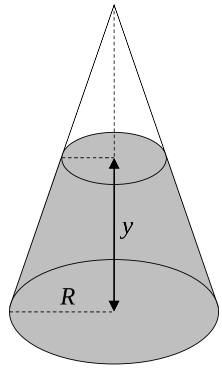
1989年京大理 $\boxed{6}$

円錐形タンクの底面の半径を R (m) とする。



水面の高さが y (m) であるとき、水面の半径は、 $R\left(1-\dfrac{y}{10}\right)$ (m) である。

このときタンク内にたまっている水の体積は

$$V(y)=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot 10-\frac{1}{3}\pi R^2\left(1-\frac{y}{10}\right)^2\cdot(10-y)=\frac{1}{3}\pi R^2\left\{10-\frac{(10-y)^3}{100}\right\}\ (\mathrm{m}^3)$$

y は時間 t の関数である。注水を始めたときを $t=0$ とし、t の単位は分とする。

$$\frac{dV(y)}{dt}=V'(y)\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{3(10-y)^2}{100}\cdot\frac{dy}{dt}=\pi R^2\cdot\frac{(10-y)^2}{100}\cdot\frac{dy}{dt}\ (\mathrm{m}^3/分)=\pi R^2\cdot 10(10-y)^2\cdot\frac{dy}{dt}\ (\ell/分)$$

$y<10$ のとき、これが $(10-y)$ $(\ell/分)$ に等しいから

$$\pi R^2\cdot 10(10-y)^2\cdot\frac{dy}{dt}=10-y \qquad 10(10-y)dy=\frac{1}{\pi R^2}dt \qquad 100y-5y^2=\frac{1}{\pi R^2}t+C$$

$t=0$ において、 $y=0$ であるから　$\therefore C=0$

$t=540$ において、 $y=2$ であるから　$200-20=180=\dfrac{540}{\pi R^2}$　$\therefore \pi R^2=3$　$\therefore t=300y-15y^2$

タンクが一杯になったとき、 $y=10$ であり、このとき　$t=3000-1500=1500$ (分)

$1500-540=960$ (分) $=16$ (時間) であるから、求める時間は　$\therefore 16$ 時間　……(答)