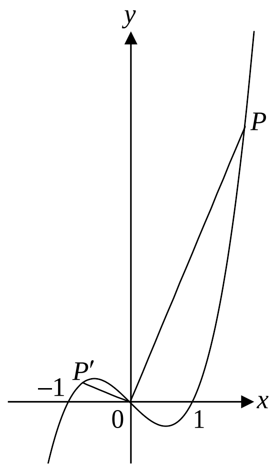
1990 年京大後期文 $\boxed{1}$



$P'(t,\ t^3-t)\ (t<0)$ とすると、$t^3-t=t(t+1)(t-1)>0$ より　$\therefore -1<t<0$

OP' の傾きは　$\dfrac{t^3-t}{t}=t^2-1<0$　　OP の傾きは　$\dfrac{1}{1-t^2}>0$

$x^3-x=\dfrac{1}{1-t^2}x$ とすると　$x^3-\dfrac{2-t^2}{1-t^2}x=x\left(x^2-\dfrac{2-t^2}{1-t^2}\right)=0$

$-1<t<0$ の条件下で、P' の x 座標を t とすると、P の x 座標は $\sqrt{\dfrac{2-t^2}{1-t^2}}$ である。

$\alpha=\sqrt{\dfrac{2-t^2}{1-t^2}}$ とすると

$$S=\int_0^\alpha\left(\frac{1}{1-t^2}x-x^3+x\right)dx=\int_0^\alpha(\alpha^2x-x^3)dx=\left[\frac{\alpha^2}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^\alpha=\frac{1}{4}\alpha^4=\frac{1}{4}\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}\right)^2$$

$$S'=\int_t^0\left\{x^3-x-(t^2-1)x\right\}dx=\int_t^0(x^3-t^2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{t^2}{2}x^2\right]_t^0=\frac{1}{4}t^4$$

$$\therefore \frac{S}{S'}=\frac{1}{t^4}\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}\right)^2=\left\{\frac{2-t^2}{t^2(1-t^2)}\right\}^2$$

$\dfrac{S}{S'}$ は、$\dfrac{2-t^2}{t^2(1-t^2)}$ が最小になるとき、最小である。$0<t^2<1$ より、$f(k)=\dfrac{2-k}{k(1-k)}\ (0<k<1)$ とすると

$$f'(k)=\frac{-(k-k^2)-(2-k)(1-2k)}{k^2(1-k)^2}=\frac{-k+k^2-(2-5k+2k^2)}{k^2(1-k)^2}=\frac{-k^2+4k-2}{k^2(1-k)^2}=-\frac{\left\{k-(2-\sqrt{2})\right\}\left\{k-(2+\sqrt{2})\right\}}{k^2(1-k)^2}$$

増減は右の通りで、$k=2-\sqrt{2}$ のとき極小である。

k	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$		↘		↗	

$$f(2-\sqrt{2})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{18-16}=3+2\sqrt{2}$$

求める $\dfrac{S}{S'}$ の最小値は　$\therefore (3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$　……(答)

なお、最小値を与える t は、$t=-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ である。