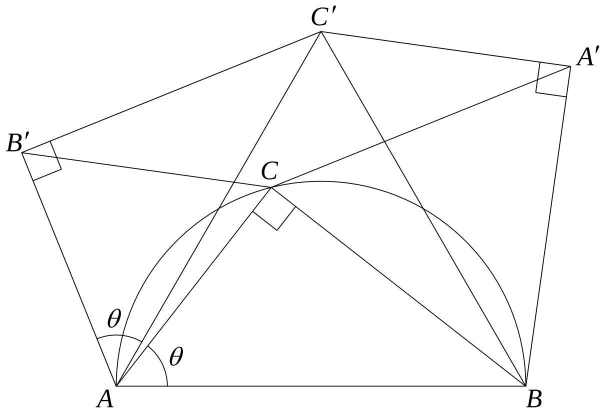
1990 年京大後期文 $\boxed{2}$



$AB=2R$ とすると　$AC=2R\cos\theta,\ BC=2R\sin\theta$

$\angle C'AB=\angle B'AC=\dfrac{\pi}{3}$ より　$\angle CAB=\angle B'AC'=\theta$

$AC=AB',\ AB=AC'$ であるから　$\triangle ABC\equiv\triangle AC'B'$

$\therefore BC=C'B'=2R\sin\theta$

$\angle C'BA=\angle A'BC=\dfrac{\pi}{3}$ より　$\angle CBA=\angle A'BC'$

$BC=BA',\ BA=BC'$ であるから　$\triangle ABC\equiv\triangle C'BA'$

$\therefore AC=C'A'=2R\cos\theta$

以上により、$CA'=B'C',\ CB'=A'C'$ であるから、四角形 $CA'C'B'$ は、平行四辺形である。

$\angle A'CB'=2\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{6}\pi$ であるから、四角形 $CA'C'B'$ の面積は

$$CA'\cdot CB'\cdot\sin\frac{5}{6}\pi=4R^2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{2}=R^2\sin 2\theta$$

これが最大になるのは、$\sin 2\theta=1$ のときである。すなわち　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$　……(答)