

1990 年京大後期文 4

(1)

出発してから t 秒後の、3 点 P, Q, R の座標は、 $P(t, 0, 0), Q(2, t, 0), R(2, 2, t)$ とおける。

$$\overrightarrow{QP} = (t-2, -t, 0), \overrightarrow{QR} = (0, 2-t, t) \text{ より } |\overrightarrow{QP}|^2 = |\overrightarrow{QR}|^2 = (t-2)^2 + t^2 = 2t^2 - 4t + 4$$

したがって、三角形 PQR は、常に二等辺三角形である。(証明終)

(2)

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = -t(2-t) = t^2 - 2t$ であり、 $\angle PQR = \theta$ とすると

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = |\overrightarrow{QP}|^2 \cos \theta = (2t^2 - 4t + 4) \cos \theta = t^2 - 2t \quad \cos \theta = \frac{t^2 - 2t}{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{QP}|^4 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} (2t^2 - 4t + 4)^2 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{4} (2t^2 - 4t + 4)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{t^2 - 2t}{2t^2 - 4t + 4} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (2t^2 - 4t + 4)^2 - (t^2 - 2t)^2 \right\} \end{aligned}$$

$T = t^2 - 2t$ とおくと、 $T = (t-1)^2 - 1 \geq -1$ であり、

$$S^2 = \frac{1}{4} \left\{ (2T + 4)^2 - T^2 \right\} = \frac{1}{4} (3T^2 + 16T + 16) = \frac{3}{4} \left(T + \frac{8}{3} \right)^2 - \frac{4}{3}$$

S^2 は $T \geq -1$ において単調増加であるから、 $T = -1$ のとき最小となる。

$$T = -1 \text{ のとき } (t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

以上により、 S が最小になるのは 1 秒後。……(答)

※理系 4 には (1) がない。

$T = t^2 - 2t$ と置き換えれば二次関数の最小値に帰着されるが、 t の微分で解いてもよい。