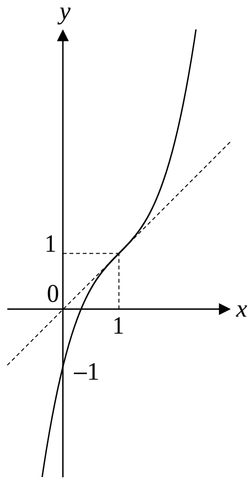
1990年京大文 $\boxed{4}$

(1)



$f(x)=(x-1)^3+x \quad f'(x)=3(x-1)^2+1 \quad f''(x)=6(x-1)$

$f'(x)>0$ より、$f(x)$ は単調増加。

$x>1$ のとき、$f''(x)>0$ より、下に凸。$x<1$ のとき、$f''(x)<0$ より、上に凸。

$x=1$ のとき、$f''(1)=0$ より、$x=1$ において変曲点を持つ。

グラフの概形は右図の通り。

(2)

数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき　$f_1(x)-x=(x-1)^3$ であるから、$f_1(x)-x=0$ の解は、$x=1$ のみ。

$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき

$x>1$ において $f_k(x)-x>0$、$x=1$ において $f_k(1)-1=0$、$x<1$ において $f_k(x)-x<0$ と仮定する。

(1) のグラフの概形により、

$x>1$ のとき　$f_k(x)>x>1$ より　$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))>f_k(x)>x \quad \therefore f_{k+1}(x)-x>0$

$x=1$ のとき　$f_k(1)=1$ より　$f_{k+1}(1)=f(f_k(1))=f(1)=1 \quad \therefore f_{k+1}(1)-1=0$

$x<1$ のとき　$f_k(x)<x<1$ より　$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))<f_k(x)<x \quad \therefore f_{k+1}(x)-x<0$

したがって、$n=k+1$ のときも成立。

以上により、どんな自然数 n についても、$f_n(x)=x$ の解は、$x=1$ に限られる。(証明終)