1990 年京大後期理（理学部以外） $\boxed{1}$

$y=x^4-6x^2$ 上の点 $(t,\ t^4-6t^2)$ における接線は　$y=(4t^3-12t)(x-t)+t^4-6t^2=(4t^3-12t)x-3t^4+6t^2$

これが $(a,\ b)$ を通るとき　$b=(4t^3-12t)a-3t^4+6t^2$　$3t^4-4at^3-6t^2+12at+b=0$ ――①

四次方程式①が、相違なる 4 つの実数解を持てばよい。

$f(t)=3t^4-4at^3-6t^2+12at+b$ とすると

$f'(t)=12t^3-12at^2-12t+12a=12(t-1)(t+1)(t-a)$

$f'(t)=0$ が相違なる 3 つの実数解を持つから、$a\neq\pm1$ であり、

$f(1)=3-4a-6+12a+b=8a+b-3$　$f(-1)=3+4a-6-12a-b=-8a+b-3$

$f(a)=3a^4-4a^4-6a^2+12a^2+b=-a^4+6a^2+b$

$a<-1$ のとき

$f(t)$ 増減は右の通りで、$f(a)<0,\ f(-1)>0,\ f(1)<0$

$\therefore b<a^4-6a^2,\ b>8a+3,\ b<-8a+3$

t	$\cdots$	a	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$-1<a<1$ のとき

$f(t)$ 増減は右の通りで、$f(-1)<0,\ f(a)>0,\ f(1)<0$

$\therefore b<8a+3,\ b>a^4-6a^2,\ b<-8a+3$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$1<a$ のとき

$f(t)$ 増減は右の通りで、$f(-1)<0,\ f(1)>0,\ f(a)<0$

$\therefore b<8a+3,\ b>-8a+3,\ b<a^4-6a^2$

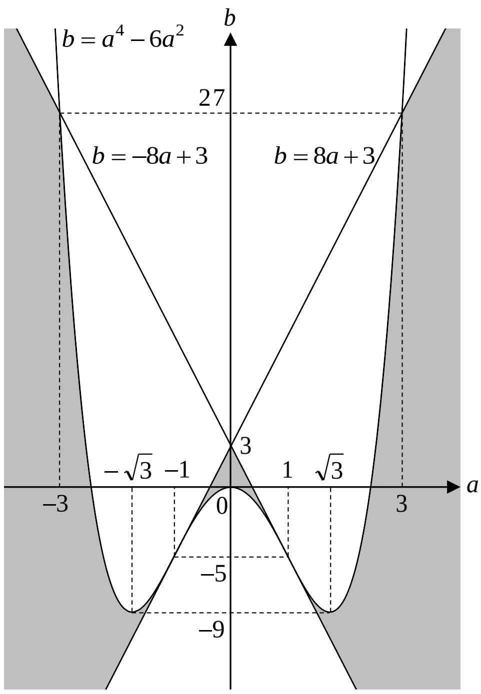
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$b=a^4-6a^2$ の増減と凹凸は、

$b'=4a^3-12a=4a(a^2-3)$　$b''=21a^2-12=12(a^2-1)$

より、下の通り。

a	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
b'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
b''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
b	↘		↗		↗		↘		↘		↗



$a^4-6a^2=8a+3$ とすると

$a^4-6a^2-8a-3=(a+1)^3(a-3)=0$

$a^4-6a^2=-8a+3$ とすると

$a^4-6a^2+8a-3=(a-1)^3(a+3)=0$

$(a,\ b)$ の存在範囲は右図の通り。境界線を含まない。

$b=8a+3,\ b=-8a+3$ は、$b=a^4-6a^2$ の変曲点における接線である。

1990年京大後期理(理学部) $\boxed{1}$

$f''(x)>0$ より、 $f'(x)$ は単調増加である。

$x\neq a$ のとき　$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ より　$(x-a)g(x)=f(x)-f(a)$

両辺微分すると　$g(x)+(x-a)g'(x)=f'(x)$ ——①

$x<a$ のとき

平均値の定理より、 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c),\ x<c<a$ であるような実数 c が存在するので、

①より　$f'(c)+(x-a)g'(x)=f'(x)$　$(x-a)g'(x)=f'(x)-f'(c)$

$x-a<0$ であり、 $f'(x)<f'(c)$ より $f'(x)-f'(c)<0$ であるから　$\therefore g'(x)>0$

$a<x$ のとき

平均値の定理より、 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c),\ a<c<x$ であるような実数 c が存在するので、

①より　$f'(c)+(x-a)g'(x)=f'(x)$　$(x-a)g'(x)=f'(x)-f'(c)$

$x-a>0$ であり、 $f'(x)>f'(c)$ より $f'(x)-f'(c)>0$ であるから　$\therefore g'(x)>0$

したがって、 $x\neq a$ のとき、 $g'(x)>0$ が示された。

一方、 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ より、 $g(x)$ は $x=a$ においても連続である。

$x\neq a$ のとき $g'(x)>0$ であるから、 $x=a$ の近傍において、 $g(x)$ が減少することはない。

以上により、 $g(x)$ は増加関数である。(証明終)