1990 年京大後期理 $\boxed{4}$

出発してから t 秒後の、3 点 $P,\ Q,\ R$ の座標は、 $P(t,\ 0,\ 0),\ Q(2,\ t,\ 0),\ R(2,\ 2,\ t)$ とおける。

$\overrightarrow{QP}=(t-2,\ -t,\ 0),\ \overrightarrow{QR}=(0,\ 2-t,\ t)$ より $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2=\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=(t-2)^2+t^2=2t^2-4t+4$

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=-t(2-t)=t^2-2t$ であり、$\angle PQR=\theta$ とすると

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\left|\overrightarrow{QP}\right|^2\cos\theta=(2t^2-4t+4)\cos\theta=t^2-2t \qquad \cos\theta=\frac{t^2-2t}{2t^2-4t+4}$$

$$S^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{QP}\right|^4\sin^2\theta=\frac{1}{4}(2t^2-4t+4)^2(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{4}(2t^2-4t+4)^2\left\{1-\left(\frac{t^2-2t}{2t^2-4t+4}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(2t^2-4t+4)^2-(t^2-2t)^2\right\}$$

$T=t^2-2t$ とおくと、$T=(t-1)^2-1\geqq-1$ であり、

$$S^2=\frac{1}{4}\left\{(2T+4)^2-T^2\right\}=\frac{1}{4}(3T^2+16T+16)=\frac{3}{4}\left(T+\frac{8}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

S^2 は $T\geqq-1$ において単調増加であるから、$T=-1$ のとき最小となる。
$T=-1$ のとき $(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$

以上により、S が最小になるのは1秒後。……(答)

※文系 $\boxed{4}$ は、二等辺三角形であることを教えてくれている。

$T=t^2-2t$ と置き換えれば二次関数の最小値に帰着されるが、t の微分で解いてもよい。