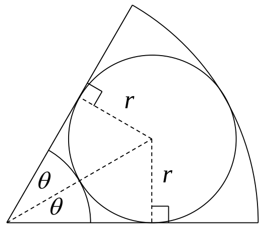
1990 年京大理 $\boxed{4}$

(1)

半径$1,\ 1-2r$ の同心円の間に、半径 r の円が入っているとき、

半径 r の円は、半径1の円に内接し、半径$1-2r$ の円に外接している。$1-2r>0$ より　$0<r<\dfrac{1}{2}$ ——①

右図のように、題意を満たす半径 r の円が、内接する扇形の



中心角を 2θ とすると　$\sin\theta=\dfrac{r}{1-r}$

$2\theta \leqq \dfrac{2\pi}{n}$ であることが条件であるから　$\theta \leqq \dfrac{\pi}{n}$

$n \geqq 2$ であるから　$\theta \leqq \dfrac{\pi}{n} \leqq \dfrac{\pi}{2}$　したがって、$\sin\theta \leqq \sin\dfrac{\pi}{n}$ であればよいから、$\dfrac{r}{1-r} \leqq \sin\dfrac{\pi}{n}$ であり、

$\dfrac{1}{1-r} \leqq 1+\sin\dfrac{\pi}{n}$　$1-r \geqq \dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi}{2}}$　$r \leqq 1-\dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}$　$\therefore 0<r \leqq \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}$　（証明終）

ただし、①より、$n=2$ のとき等号は成立しない。

(2)

$n+2$ 個の円の面積の総和を $S(r)$ とすると

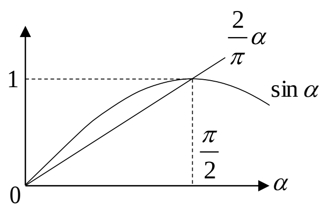
$$S(r)=n\times\pi r^2+\pi+\pi(1-2r)^2=\pi(n+4)r^2-4\pi r+2\pi=\pi\left\{(n+4)\left(r^2-\frac{4}{n+4}r\right)\right\}+2\pi$$

$$=\pi\left\{(n+4)\left(r-\frac{2}{n+4}\right)^2-\frac{4}{n+4}\right\}+2\pi=\pi(n+4)\left(r-\frac{2}{n+4}\right)^2+\frac{2n+4}{n+4}\pi$$

ここで、$\dfrac{2}{n+4} \leqq \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}$ とすると　$\dfrac{n+4}{2} \geqq \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}+1$　$\dfrac{n+2}{2} \geqq \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$　$(n+2)\sin\dfrac{\pi}{n} \geqq 2$ ——②

$n \geqq 2$ のとき、②が成立するか調べる。$\alpha=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと　$(n+2)\sin\dfrac{\pi}{n}=\left(\dfrac{\pi}{\alpha}+2\right)\sin\alpha$

凸性より、$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin\alpha \geqq \dfrac{2}{\pi}\alpha$ であるから



$\left(\dfrac{\pi}{\alpha}+2\right)\sin\alpha \geqq \left(\dfrac{\pi}{\alpha}+2\right)\cdot\dfrac{2}{\pi}\alpha=2+\dfrac{4}{\pi}\alpha>2$　$\therefore (n+2)\sin\dfrac{\pi}{n}>2$

したがって、②が成立し、$\dfrac{2}{n+4}<\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}$ も成立するから、$S(r)$ を最小にする r は　$\therefore r=\dfrac{2}{n+4}$　……(答)