1990年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$N=5$ のとき

$X=1$ となるのはサイコロの目が1, 6のときで、その他の X となる目は、それぞれ1通りしかない。

$$P(X=1)=\frac{1}{3},\ P(X=0)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\frac{1}{6}$$

次に、$Y=2$ となる場合を考える。

$X=1$ ならば、サイコロの目が1, 6であればよく、$X\neq 1$ ならば、$Y=2$ となる目はそれぞれ1通りしかない。

すなわち、$Y=2$ となる確率は、$X=1$ のとき $\frac{1}{3}$、$X\neq 1$ のとき $\frac{1}{6}$ であるから

$$P(X=1,\ Y=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\qquad P(X=1)=\frac{1}{3}\qquad P(Y=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

したがって、$P(X=1,\ Y=2)\neq P(X=1)P(Y=2)$ であり、X と Y は互いに独立ではない。

$N=6$ のとき

すべての X は、サイコロの目と一対一に対応しており、$P(X=i)=\frac{1}{6}\ (0\leqq i\leqq 5)$

同様に、X の値に関わらず、すべての Y はサイコロの目と一対一に対応するから、$P(Y=j)=\frac{1}{6}\ (0\leqq j\leqq 5)$

したがって、$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)\ (0\leqq i\leqq 5,\ 0\leqq j\leqq 5)$ であり、X と Y は互いに独立である。

(2)

$N\geqq 7$ のとき

$X=6$ となったとき、$Y=6$ にはなり得ないから　$P(X=6,\ Y=6)=0$

一方、$P(X=6)=\frac{1}{6}$ であり、$Y=6$ となるには2回の目の合計が6であればよいから　$P(Y=6)=5\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

したがって、$P(X=6,\ Y=6)\neq P(X=6)P(Y=6)$ であり、X と Y は互いに独立ではない。

$N=5,\ 6$ のときは判明しているので、$N=3,\ 4$ のときを考える。

$N=3$ のとき

サイコロの目が1, 4ならば $X=1$、2, 5ならば $X=2$、3, 6ならば $X=0$ である。

各 X にサイコロの目が2つずつ対応しているから、$P(X=i)=\frac{1}{3}\ (0\leqq i\leqq 2)$

同様に、X の値に関わらず、各 Y にサイコロの目が2つずつ対応するから、$P(Y=j)=\frac{1}{3}\ (0\leqq j\leqq 2)$

したがって、$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)\ (0\leqq i\leqq 2,\ 0\leqq j\leqq 2)$ であり、X と Y は互いに独立である。

$N=4$のとき
サイコロの目が$1, 5$ならば$X=1$、$2, 6$ならば$X=2$、3ならば$X=3$、4ならば$X=0$であり、

$$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{3},\ P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{6}$$

例えば$Y=0$となる場合を考える。
サイコロの目が、$X=1$ならば3、$X=2$ならば$2, 6$、$X=3$ならば$1, 5$、$X=0$ならば4であるから

$$P(X=1,\ Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\qquad P(X=2,\ Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=3,\ Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}\qquad P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(Y=0)=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}$$

したがって、$P(X=i,\ Y=0)\neq P(X=i)P(Y=0)\ (0\leqq i\leqq 3)$であり、$X$と$Y$は互いに独立ではない。

以上により、求めるNは　$\therefore N=3,\ 6$ ……(答)

※題意が掴みにくく、解答しにくい問題。
　XとYが互いに独立ではないことを示すには、$P(X=i,\ Y=j)\neq P(X=i)P(Y=j)$となるような例を、
　1 つ挙げればよい。