1991年京大後期文 $\boxed{1}$

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_4}$　$\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\left|\overrightarrow{OP_3}\right|=\left|\overrightarrow{OP_4}\right|=1$であるから　$2+2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=2+2\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_4}$　$\therefore\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_4}$

同様にして、$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_4}$、$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_4}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$ も示される。

次に、$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right|^2=2-2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$、$\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|^2=\left|\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_3}\right|^2=2-2\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_4}$ であり、

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_4}$ より　$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|^2$　$\therefore\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|$

同様にして、$\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|=\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right|$、$\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|=\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$ も示される。

以上により、これら4点をどのように2点ずつに分けても、各2点間の長さは等しい。
これら4点は、単位円上の相違なる点であり、凸四角形の頂点である。
したがって、この四角形の対向する2辺の長さ、2本の対角線の長さは、いずれも等しいから、
これら4点は、長方形の頂点である。(証明終)