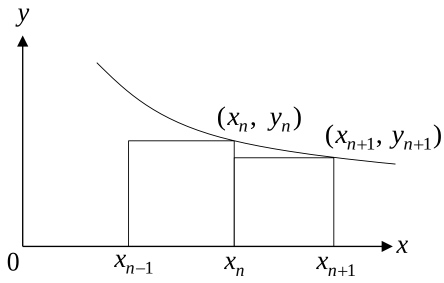
1991年京大後期文 $\boxed{2}$



S_n の頂点のうち、 $xy=1$ 上にあるものを $(x_n,\ y_n)$ とすると

S_{n+1} の一辺の長さは、 $y_{n+1}=x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_{n+1}}$ であるから

$$x_n=x_{n+1}-\frac{1}{x_{n+1}} \quad \therefore x_n{}^2=x_{n+1}{}^2+\frac{1}{x_{n+1}{}^2}-2 \quad \text{——①}$$

$x_n{}^2 \geqq n$ を、数学的帰納法により示す。

$n=1$ のとき、 $x_1=1$ であるから、 $x_1{}^2 \geqq 1$ となり、成立。

$n=k$ のとき、 $x_k{}^2 \geqq k$ と仮定すると、①より

$$x_k{}^2=x_{k+1}{}^2+\frac{1}{x_{k+1}{}^2}-2 \geqq k \quad x_{k+1}{}^2 \geqq k+2-\frac{1}{x_{k+1}{}^2}$$

$x_{k+1}>1$ より、 $\dfrac{1}{x_{k+1}{}^2}<1$ であるから $\quad \therefore x_{k+1}{}^2 \geqq k+2-\dfrac{1}{x_{k+1}{}^2}>k+1$

したがって、 $n=k+1$ のときも成立。以上により、 $x_n{}^2 \geqq n$ が示された。(証明終)