1991 年京大文 $\boxed{4}$

$f(x)=x^3-px+q,\ g(x)=x^3-2px^2+p^2x-q^2$ とする。

$f'(x)=3x^2-p$ であり、 $p\leqq 0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ であるから、 $f(x)$ は単調増加である。

このとき、 $f(x)=0$ は、実数解を 1 つしか持たないので、不適。

$p>0$ のとき、 $f'(x)=3\left(x+\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)$ である。

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)=0$ の解がすべて実数である条件は

$$f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)\leqq 0 \quad \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}p^{\frac{3}{2}}+q\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}p^{\frac{3}{2}}+q\right)\leqq 0$$

$$-\frac{4}{27}p^3+q^2\leqq 0 \quad \therefore q^2\leqq\frac{4}{27}p^3$$

$f(x)=0$ の解がすべて実数である条件は　$p>0$ かつ $q^2\leqq\dfrac{4}{27}p^3$ ――①

次に、 $g'(x)=3x^2-4px+p^2=(3x-p)(x-p)$ である。

①が成り立つとき、 $p>0$ であるから、 $g(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$\dfrac{p}{3}$	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$g(x)=0$ の解がすべて実数である条件は

$$g\left(\frac{p}{3}\right)\cdot g(p)\leqq 0 \quad \left(\frac{4}{27}p^3-q^2\right)\left(-\frac{4}{27}p^3-q^2\right)\leqq 0$$

$$\left(\frac{4}{27}p^3-q^2\right)\left(\frac{4}{27}p^3+q^2\right)\geqq 0$$

$\dfrac{4}{27}p^3+q^2>0$ であるから　$\dfrac{4}{27}p^3-q^2\geqq 0$　$\therefore q^2\leqq\dfrac{4}{27}p^3$

①より、 $q^2\leqq\dfrac{4}{27}p^3$ であるから、①が成り立つとき、 $g(x)=0$ の解はすべて実数である。

すなわち、 $f(x)=0$ の解がすべて実数であるとき、 $g(x)=0$ の解もすべて実数である。（証明終）