1991 年京大後期理(理学部以外) $\boxed{1}$

(1)

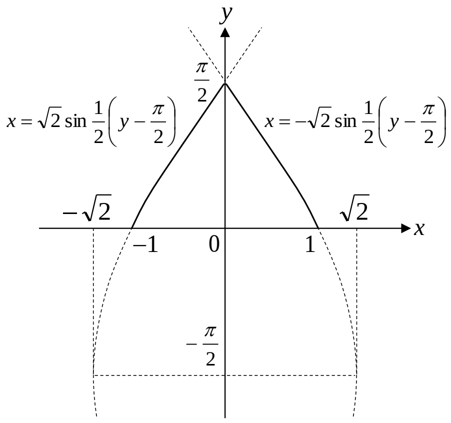
$\sin y = 1 - x^2$ とすると

$$x^2 = 1 - \sin y = 1 - 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} = \left(\sin\frac{y}{2} - \cos\frac{y}{2}\right)^2 = \left\{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \quad \therefore x = \pm\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるので

$$\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 0 \text{のとき} & x = \sqrt{2}\sin\dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 \leqq x \leqq 1 \text{のとき} & x = -\sqrt{2}\sin\dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$y = f(x)$ のグラフは右図の実線部分である。



(2)

対称性より

$$-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)dy = 2\sqrt{2}\left[2\cos\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

1991 年京大後期理（理学部）$\boxed{1}$

（1）

$f(x+y)=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$ 　$y=0$ とすると　$\therefore f(x)=P_0(x)$

両辺を順次 y で微分すると

$f'(x+y)=P_1(x)+2P_2(x)y+\cdots+nP_n(x)y^{n-1}$ 　$y=0$ とすると　$\therefore f'(x)=P_1(x)$

$f''(x+y)=2P_2(x)+\cdots+n(n-1)P_n(x)y^{n-2}$ 　$y=0$ とすると　$\therefore f''(x)=2P_2(x)$

$f^{(n)}(x+y)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1P_n(x)=n!P_n(x)$ 　$y=0$ とすると　$\therefore f^{(n)}(x)=n!P_n(x)$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ とすると、$f^{(n)}(x)=n!a_n$ であるから

$\therefore P_0(x)=f(x),\ P_1(x)=f'(x),\ P_2(x)=\dfrac{1}{2}f''(x),\ P_n(x)=a_n$ 　（証明終）

（2）

$P_0(x)=f(x)$ より　$f(x+y)-f(x)=P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$ ――①

y を cy で置き換えれば　$f(x+cy)=P_0(x)+cP_1(x)y+c^2P_2(x)y^2+\cdots+c^nP_n(x)y^n$

両辺を y で微分すると　$cf'(x+cy)=cP_1(x)+2c^2P_2(x)y+\cdots+nc^nP_n(x)y^{n-1}$

$f'(x+cy)=P_1(x)+2cP_2(x)y+\cdots+nc^{n-1}P_n(x)y^{n-1}$

$yf'(x+cy)=P_1(x)y+2cP_2(x)y^2+\cdots+nc^{n-1}P_n(x)y^n$ ――②

①、②より、$f(x+y)-f(x)=yf'(x+cy)$ のとき、$2\leqq k\leqq n$ について $kc^{k-1}=1$ が成立する。

$n\geqq 3$ のとき、少なくとも $c=\dfrac{1}{2},\ c^2=\dfrac{1}{3}$ でなければならないが、不適。

したがって、$n\leqq 2$ であり、$f(x)$ の次数は 2 以下である。（証明終）

（注）

厳密には、y で偏微分することになる。