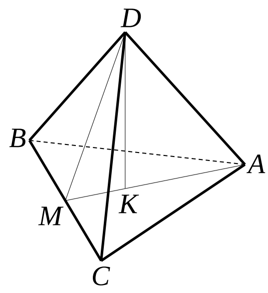
1991 年京大後期理（理学部以外）$\boxed{2}$

（1）

一辺の長さが $2cm$ の正四面体の高さを求める。

1 つの頂点 D から正三角形 ABC に下ろした垂線の足を K 、辺 BC の中点を M とすると、H は AM 上にあり、$AH:HM=2:1$ であるから



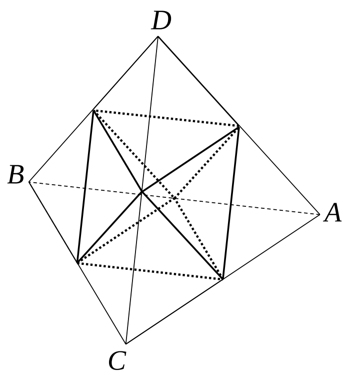
$DM=AM=\sqrt{3}$ 　 $HM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 　 $DH^2=DM^2-HM^2=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$ 　 $\therefore DK=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

正八面体 H の上面は、正四面体の辺 $AD,\ BD,\ CD$ の中点を結んだ正三角形であり、相似性より、この正三角形は DK の中点を通る。

高さ h_0 は、DK の半分であるから　$\therefore h_0=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ (cm)$ ……（答）

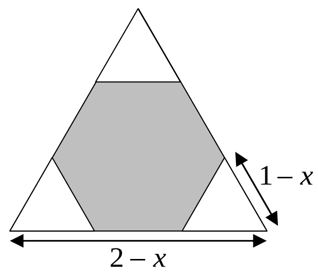
（2）

正四面体の頂点 $A,\ B,\ C$ から、辺に沿って x 離れた点を通る断面を考える $(0\leqq x\leqq 1)$。



このとき、容器 H の断面は右図の網掛部の通りであり、断面積は、一辺 $2-x$ の正三角形の面積から、一辺 $1-x$ の正三角形の面積の 3 倍を引いたものであるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2-x)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-x)^2=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$$



この断面の底面からの高さ h は、$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$ と表されるから　$x=\dfrac{3}{\sqrt{6}}h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}h$

断面積を h で表すと　$\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}h^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}h+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-3h^2+\sqrt{6}h+1)$

これより、水面の高さが h になったときの、容器 H 内の水の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^h(-3t^2+\sqrt{6}t+1)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-t^3+\frac{\sqrt{6}}{2}t^2+t\right]_0^h=-\frac{\sqrt{3}}{4}h^3+\frac{3\sqrt{2}}{8}h^2+\frac{\sqrt{3}}{4}h\ (cm^3)$$

毎秒 $1cm^3$ の割合で水を注入するから、求める時間は　$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^3+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}h^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}h$ (秒) ……（答）

1991 年京大後期理（理学部）$\boxed{2}$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。係数 $a,\ b,\ c,\ d$ は、整数である。
任意の自然数 n に対し、 $f(n)$ が $n(n+1)(n+2)$ で割り切れるとき

$f(n)=n(an^2+bn+c)+d$ より、 $f(n)$ は n で割り切れるから、d が n で割り切れる。
d が任意の自然数 n で割り切れるには、 $d=0$ でなければならない。　 $\therefore f(x)=x(ax^2+bx+c)$

$f(n)$ は $n+1$ で割り切れ、 n と $n+1$ は互いに素であるから、an^2+bn+c は $n+1$ で割り切れる。

$$an^2+bn+c=a\{(n+1)-1\}^2+b\{(n+1)-1\}+c=a\left\{(n+1)^2-2(n+1)+1\right\}+b(n+1)-b+c$$
$$=a(n+1)^2-(2a-b)(n+1)+a-b+c$$

an^2+bn+c が $n+1$ で割り切れるので、 $a-b+c$ が $n+1$ で割り切れる。
$a-b+c$ が任意の $n+1$ で割り切れるには、 $a-b+c=0$ でなければならない。　 $\therefore b=a+c$

$$an^2+bn+c=an^2+(a+c)n+c=(n+1)(an+c)\qquad \therefore f(x)=x(x+1)(ax+c)$$

$f(n)$ は $n+2$ で割り切れ、 $n+1$ と $n+2$ は互いに素であるから、$n(an+c)=an^2+cn$ は $n+2$ で割り切れる。

$$an^2+cn=a\{(n+2)-2\}^2+c\{(n+2)-2\}=a\left\{(n+2)^2-4(n+2)+4\right\}+c(n+2)-2c$$
$$=a(n+2)^2-(4a-c)(n+2)+4a-2c$$

an^2+cn が $n+2$ で割り切れるので、 $4a-2c$ が $n+2$ で割り切れる。
$4a-2c$ が任意の $n+2$ で割り切れるには、 $4a-2c=0$ でなければならない。　 $\therefore c=2a$

したがって　 $\therefore f(x)=x(x+1)(ax+2a)=ax(x+1)(x+2)$　（証明終）

（注）
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対し、$f(0)=0,\ f(-1)=0,\ f(-2)=0$ とすれば、$b=3a,\ c=2a,\ d=0$ を容易に得るが、
「任意の自然数 n に対し」という条件なので、上記のようにしている。