

1991 年京大後期理 6

(1)

$f(x) = e^x - e^a - (x-a)e^a$ とすると $f'(x) = e^x - e^a$ $f''(x) = e^x > 0$
 $f'(x)$ は単調増加であり、 $f'(a) = 0$ であるから、 $f(x)$ の増減は右の通り。
 $f(a) = 0$ より $\therefore f(x) \geq 0 \quad \therefore e^x \geq e^a + (x-a)e^a$ (証明終)

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

(2)

(1) より、任意の a について $e^{\sin \pi x} \geq e^a + (\sin \pi x - a)e^a$

$$\int_0^1 e^{\sin \pi x} dx \geq \int_0^1 \{e^a + (\sin \pi x - a)e^a\} dx = \left[e^a x - \frac{e^a}{\pi} \cos \pi x - a e^a x \right]_0^1 = \left(1 + \frac{2}{\pi} - a \right) e^a$$

$a = \frac{2}{\pi}$ とすれば $\therefore \int_0^1 e^{\sin \pi x} dx \geq e^{\frac{2}{\pi}}$ (証明終)