1991年京大後期理$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

(1)

2数の取り出し方は、${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り。

$Y_1=k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ と固定したとき、取り得る X_1+Y_1 のすべての和は

$$\sum_{i=k+1}^{n}(k+i)=\sum_{i=1}^{n-k}(2k+i)=2k(n-k)+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}=\frac{(n-k)(4k+n-k+1)}{2}=\frac{(n-k)(n+3k+1)}{2}$$
$$=\frac{n^2+3nk+n-nk-3k^2-k}{2}=\frac{n(n+1)+(2n-1)k-3k^2}{2}$$

X_1+Y_1 の期待値は

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n(n+1)+(2n-1)k-3k^2}{2}=n+1+\frac{2n-1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{3}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=n+1+\frac{2n-1}{2}-\frac{2n-1}{2}=n+1\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$X_1=k\ (2\leqq k\leqq n)$ となる確率は、Y_1 の選び方が $k-1$ 通りであるから　$\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

X_1 の期待値は

$$\sum_{k=2}^{n}k\cdot\frac{2(k-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=\frac{2n-1}{3}+1=\frac{2}{3}(n+1)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)

$Y_2=k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ となるには、まず k 以外の2数を取り出さなければならない。
最初、k より小さい数が $k-1$ 個、k より大きい数が $n-k$ 個あるから

$k-1\geqq 2$ のとき、k より小さい2数の選び方は ${}_{k-1}C_2=\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$ 通りで、$k=1,\ 2$ でも成立。
このとき、残った $n-2$ 個の数の中で、k は小さい方から $k-2$ 番目であり、X_2 の選び方は $n-k$ 通り。

$n-k\geqq 2$ のとき、k より大きい2数の選び方は ${}_{n-k}C_2=\dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ 通りで、$k=n-1,\ n$ でも成立。
このとき、残った $n-2$ 個の数の中で、k は小さい方から k 番目であり、X_2 の選び方は $n-k-2$ 通り。

k より小さい数と大きい数を1個ずつ選ぶ選び方は $(k-1)(n-k)$ 通りで、$k=1,\ n$ でも成立。
このとき、残った $n-2$ 個の数の中で、k は小さい方から $k-1$ 番目であり、X_2 の選び方は $n-k-1$ 通り。

カードの取り出し方の総数は${}_nC_2\cdot{}_{n-2}C_2=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$であるから、$Y_2=k$となる確率は

$$\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\times\left\{\frac{(k-1)(k-2)}{2}\cdot(n-k)+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\cdot(n-k-2)+(k-1)(n-k)\cdot(n-k-1)\right\}$$

$$=\frac{2(n-k)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\times\left\{(k-1)(k-2)+(n-k-1)(n-k-2)+2(k-1)(n-k-1)\right\}$$

$$=\frac{2(n-k)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\times\left\{k^2-3k+2+k^2-(2n-3)k+(n-1)(n-2)-2k^2+2nk-2(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2(n-k)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\times(n^2-5n+6)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Y_2の期待値は

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{2(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)=\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=n-\frac{2n-1}{3}=\frac{1}{3}(n+1)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

※ X_1+Y_1の期待値は、X_1の期待値とY_1の期待値の和であり、Y_2の期待値は、Y_1の期待値に等しい。