1991 年京大理 $\boxed{5}$

(1)

赤玉の個数が増えることはない。$n+1$回目の試行を行う前、袋にi個の赤玉があるには

i） n回目の試行を行う前、袋にi個の赤玉があり、かつn回目の試行で白玉を取り出す。

ii） n回目の試行を行う前、袋に$i+1$個の赤玉があり、かつn回目の試行で赤玉を取り出す。

のいずれかである。

n回目の試行を行う前、袋にi個の赤玉がある確率を$q_{i,n}$とすると

$$q_{1,n+1}=\frac{2}{N+3}q_{2,n}+\frac{N+2}{N+3}q_{1,n} \quad q_{2,n+1}=\frac{3}{N+3}q_{3,n}+\frac{N+1}{N+3}q_{2,n} \quad q_{3,n+1}=\frac{N}{N+3}q_{3,n}$$

$P_{i,n}=\dfrac{i}{N+3}q_{i,n}$ であるから　$\therefore q_{i,n}=\dfrac{N+3}{i}P_{i,n}$　これより

$$(N+3)P_{1,n+1}=\frac{2}{N+3}\cdot\frac{N+3}{2}P_{2,n}+\frac{N+2}{N+3}\cdot(N+3)P_{1,n}=P_{2,n}+(N+2)P_{1,n}$$

$$\frac{N+3}{2}P_{2,n+1}=\frac{3}{N+3}\cdot\frac{N+3}{3}P_{3,n}+\frac{N+1}{N+3}\cdot\frac{N+3}{2}P_{2,n}=P_{3,n}+\frac{N+1}{2}P_{2,n}$$

$$\frac{N+3}{3}P_{3,n+1}=\frac{N}{N+3}\cdot\frac{N+3}{3}P_{3,n}=\frac{N}{3}P_{3,n}$$

以上により
$$\begin{cases} P_{1,n+1}=\dfrac{1}{N+3}P_{2,n}+\dfrac{N+2}{N+3}P_{1,n} \\ P_{2,n+1}=\dfrac{2}{N+3}P_{3,n}+\dfrac{N+1}{N+3}P_{2,n} \\ P_{3,n+1}=\dfrac{N}{N+3}P_{3,n} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

(1)で求めた漸化式を、辺々足すと

$$P_{1,n+1}+P_{2,n+1}+P_{3,n+1}=\frac{N+2}{N+3}(P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n}) \quad \therefore P_{n+1}=\frac{N+2}{N+3}P_n \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$P_1=\dfrac{3}{N+3}$ であるから　$\therefore P_n=\dfrac{3}{N+3}\left(\dfrac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}$ $\cdots\cdots$(答)