1991 年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

V の各頂点を、A, B, C, D とする。

V の重心は、これらの位置ベクトルによって、$\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ で与えられる。

今、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ としても、一般性を失わない。このとき、V の重心は原点 O である。

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ より、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ であるから　$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$

AB の中点 $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ と、CD の中点 $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ について　$\therefore \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$

V の重心 O から、AB の中点、CD の中点までの距離は、等しい。
同様にして、3 組の対辺について、V の重心 O から対辺の中点までの距離は、等しいことがわかる。

V の重心 O から、対辺ではない 2 辺の中点までの距離を考える。

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\
&= \left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\
&= (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+2\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\
&= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}
\end{aligned}$$

3 組の対辺はいずれも直交するから、$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ である。

$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|^2 \quad \therefore \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|$$

同様に、$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right|^2=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$、$\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|^2=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$$\therefore \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right|,\ \left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$$

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|,\ \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|,\ \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ がわかっているので

$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$$

したがって、いずれの辺の中点も、V の重心 O からの距離は、等しいので、V の重心 O を中心とした、ある 1 つの球面上にある。（証明終）