1992年京大後期文$\boxed{1}$

(1)

$x^2-y^2=k$ が奇数解を持つとき、$m,\ n$ を整数として、$x=2m-1,\ y=2n-1$ とおける。

このとき　$x-y=2(m-n)$　$x+y=2(m+n-1)$　$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=4(m-n)(m+n-1)$

ここで、$(m+n-1)-(m-n)=2n-1$ は奇数であり、$m+n-1$ と $m-n$ の奇偶は異なる。

したがって、$m+n-1$ と $m-n$ の一方は偶数であるから、$k=4(m-n)(m+n-1)$ は、8の倍数である。

以上により示された。(証明終)

(2)

(1)より、$x^2-y^2=k$ が奇数解を持つとき、k が8の倍数であることが必要である。

逆に、k が8の倍数であるとき、$k=8l\ (l\geqq 0)$ とおくと　$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=8l$

$x-y=2,\ x+y=4l$ とすると　$\therefore x=2l+1,\ y=2l-1$

したがって、k が8の倍数であるとき、$x^2-y^2=k$ は奇数解を持つ。

求める必要十分条件は、k が8の倍数であることである。……(答)