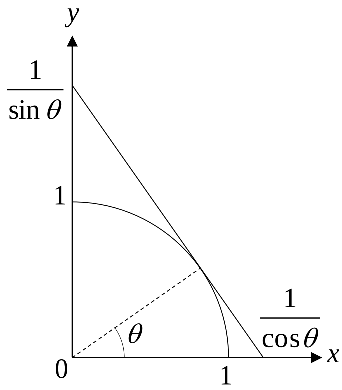
1992 年京大文 $\boxed{5}$



単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線は、

$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ と表せる。この接線と、x 軸、y 軸との交点は、

それぞれ $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$ である。

題意の回転体は、底面の半径 $\dfrac{1}{\cos\theta}$、高さ $\dfrac{1}{\sin\theta}$ の円錐であるから

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\pi}{3\sin\theta(1-\sin^2\theta)}=\frac{\pi}{3(\sin\theta-\sin^3\theta)}$$

V が最小になるのは、$\sin\theta-\sin^3\theta$ が最大になるときである。
$f(t)=t-t^3$ とおき、$0<t<1$ における増減を調べる。

$$f'(t)=1-3t^2=(1+\sqrt{3}t)(1-\sqrt{3}t)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大となる。

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ より、V の最小値は $\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ……(答)

このときの接点は、$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \cos^2\theta=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ より $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ……(答)