1992年京大後期理$\boxed{1}$文$\boxed{2}$共通

(1)

$F(0)=0,\ F(1)=a$ であり、$G(0)=a,\ G(1)=0$ であるから

$F(G(x))=-\{F(x)\}^2+pG(x)+q$ ——① より

$x=0$ のとき　$F(a)=pa+q$

$x=1$ のとき　$F(0)=0=-a^2+q$　$\therefore q=a^2$

また、$F(x)+G(x)=\int_0^1 f(t)dt=a$ より　$F(x)=a-G(x)$　①に代入すると

$$F(G(x))=-\{a-G(x)\}^2+pG(x)+a^2=-\{G(x)\}^2+(2a+p)G(x)$$

$G(x)$ を $x$ で置き換えれば　$\therefore F(x)=-x^2+(2a+p)x$

これは $F(0)=0$ を満たす。$F(1)=a$ より　$F(1)=-1+2a+p=a$　$\therefore p=-a+1$

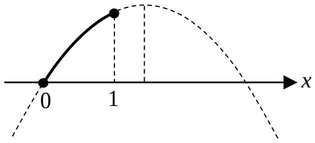
以上により　$\therefore F(x)=-x^2+(a+1)x$ ……(答)

これは $F(1)=a$ を満たし、$F(a)=pa+q=a$ を満たす。

(2)

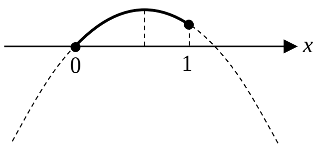
$$F(x)=-x^2+(a+1)x=-\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+1)^2}{4}$$

$\frac{a+1}{2}\geqq 1$　$a\geqq 1$ のとき　$F(x)$ の最大値は、$F(1)=a=\frac{1}{2}$ となり、不適。

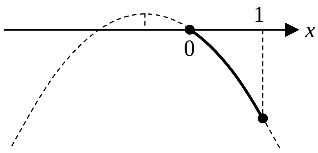



$0<\frac{a+1}{2}<1$　$-1<a<1$ のとき　$F(x)$ の最大値は、$\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{1}{2}$ より

$(a+1)^2=2$　$a=-1\pm\sqrt{2}$　適するのは　$\therefore a=-1+\sqrt{2}$




$\frac{a+1}{2}\leqq 0$　$a\leqq -1$ のとき　$F(x)$ の最大値は、$F(0)=0$ であるから、不適。




以上により

$F(x)=-x^2+\sqrt{2}x$　$\therefore f(x)=F'(x)=-2x+\sqrt{2}$ ……(答)