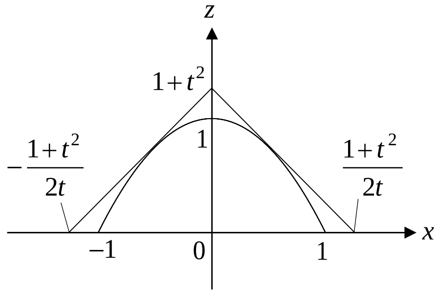
1992 年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$xz$ 平面における断面を考える。

$z=1-x^2$ 上の点 $(t,\ 1-t^2)$ $(y=0)$ における接線の式は

$$z=-2t(x-t)+1-t^2=-2tx+1+t^2$$




これと $x$ 軸、$z$ 軸との交点は、それぞれ $\left(\dfrac{1+t^2}{2t},\ 0\right),\ \left(0,\ 1+t^2\right)$ である。

対称性より、題意の立体は、底面が一辺 $\dfrac{1+t^2}{t}$ の正方形、高さ $1+t^2$ の四角錐である。

$$\therefore V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1+t^2}{t}\right)^2(1+t^2)=\frac{(1+t^2)^3}{3t^2} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$$V'(t)=\frac{3(1+t^2)^2\cdot 2t\cdot t^2-(1+t^2)^3\cdot 2t}{3t^4}=\frac{2(1+t^2)^2\left\{3t^2-(1+t^2)\right\}}{3t^3}=\frac{2(1+t^2)^2(2t^2-1)}{3t^3}$$

増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極小である。

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{4}$$

最小値は $\dfrac{9}{4}\ \left(t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\cdots\cdots$(答)

※$V(t)$ は、$t^2$ の関数と考えてもよい。