1992年京大理 $\boxed{6}$

(1)

数学的帰納法により示す。

$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき、$a_k{}^2+b_k{}^2=c_k{}^2$と仮定する。

$$a_{k+1}{}^2=(2c_k-a_k-2b_k)^2=4c_k{}^2+a_k{}^2+4b_k{}^2-4c_ka_k+4a_kb_k-8b_kc_k$$
$$b_{k+1}{}^2=(2c_k-2a_k-b_k)^2=4c_k{}^2+4a_k{}^2+b_k{}^2-8c_ka_k+4a_kb_k-4b_kc_k$$
$$c_{k+1}{}^2=(3c_k-2a_k-2b_k)^2=9c_k{}^2+4a_k{}^2+4b_k{}^2-12c_ka_k+8a_kb_k-12b_kc_k$$

$a_k{}^2+b_k{}^2=c_k{}^2$より

$$a_{k+1}{}^2+b_{k+1}{}^2=8c_k{}^2+5a_k{}^2+5b_k{}^2-12c_ka_k+8a_kb_k-12b_kc_k=13c_k{}^2-12c_ka_k+8a_kb_k-12b_kc_k$$
$$c_{k+1}{}^2=9c_k{}^2+4a_k{}^2+4b_k{}^2-12c_ka_k+8a_kb_k-12b_kc_k=13c_k{}^2-12c_ka_k+8a_kb_k-12b_kc_k$$

したがって、$n=k+1$のときも、$a_{k+1}{}^2+b_{k+1}{}^2=c_{k+1}{}^2$が成立する。

以上により示された。(証明終)

(2)

$n=1$のとき　$a_1>0,\ b_1>0,\ c_1>0$

$n=k$のとき、$a_k\geqq 0,\ b_k\geqq 0,\ c_k>0$と仮定する。

このとき、$a_k=c_k\cos\theta_k,\ b_k=c_k\sin\theta_k$とおけて、$0\leqq\theta_k\leqq\dfrac{\pi}{2}$である。

$$c_{k+1}=3c_k-2a_k-2b_k=c_k(3-2\sin\theta_k-2\cos\theta_k)=c_k\left\{3-2\sqrt{2}\sin\left(\theta_k+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta_k+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta_k+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　$\therefore(3-2\sqrt{2})c_k\leqq c_{k+1}\leqq c_k$

したがって、$c_{k+1}>0$が示された。式の定義より、$a_{k+1}\geqq 0,\ b_{k+1}\geqq 0$は明らかである。

同時に、$c_{k+1}\leqq c_k$も示されたので　$\therefore c_n>0,\ c_n\geqq c_{n+1}$　(証明終)

(3)

$c_{m+2}=c_{m+1}$のとき

$$c_{m+2}=c_{m+1}\left\{3-2\sqrt{2}\sin\left(\theta_{m+1}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=c_{m+1}\qquad \sin\left(\theta_{m+1}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \therefore\theta_{m+1}=0,\ \frac{\pi}{2}$$

$\theta_{m+1}=0$のとき　$b_{m+1}=0,\ a_{m+1}=c_{m+1}$　$b_{m+1}=|2c_m-2a_m-b_m|=0$　$c_m=a_m+\dfrac{1}{2}b_m$

$$c_m{}^2=a_m{}^2+a_mb_m+\frac{1}{4}b_m{}^2=a_m{}^2+b_m{}^2\qquad a_mb_m-\frac{3}{4}b_m{}^2=b_m\left(a_m-\frac{3}{4}b_m\right)=0$$

$b_m=0$または$a_m=\dfrac{3}{4}b_m$が成り立つ。

$b_m=0$ のとき　$c_m=a_m$ であり、$a_{m+1}=c_{m+1}=3c_m-2c_m=c_m$ となるが、$c_m>c_{m+1}$ より不適。

$a_m=\frac{3}{4}b_m$ のとき　${c_m}^2=\frac{9}{16}{b_m}^2+{b_m}^2=\frac{25}{16}{b_m}^2$ より、$c_m=\frac{5}{4}b_m$ である。

このとき　$a_{m+1}=c_{m+1}=\frac{15}{4}b_m-\frac{3}{2}b_m-2b_m=\frac{1}{4}b_m=\frac{1}{5}c_m$　$c_m=5c_{m+1}>c_{m+1}$ が成立。

$\theta_{m+1}=\frac{\pi}{2}$ のとき　$a_{m+1}=0,\ b_{m+1}=c_{m+1}$　$a_{m+1}=\left|2c_m-a_m-2b_m\right|=0$　$c_m=\frac{1}{2}a_m+b_m$

$${c_m}^2=\frac{1}{4}{a_m}^2+a_mb_m+{b_m}^2={a_m}^2+{b_m}^2 \qquad a_mb_m-\frac{3}{4}{a_m}^2=a_m\left(b_m-\frac{3}{4}a_m\right)=0$$

$a_m=0$ または $b_m=\frac{3}{4}a_m$ が成り立つ。

$a_m=0$ のとき　$c_m=b_m$ であり、$b_{m+1}=c_{m+1}=3c_m-2c_m=c_m$ となるが、$c_m>c_{m+1}$ より不適。

$b_m=\frac{3}{4}a_m$ のとき　${c_m}^2={a_m}^2+\frac{9}{16}{a_m}^2+=\frac{25}{16}{a_m}^2$ より、$c_m=\frac{5}{4}a_m$ である。

このとき　$b_{m+1}=c_{m+1}=\frac{15}{4}a_m-2a_m-\frac{3}{2}a_m=\frac{1}{4}a_m=\frac{1}{5}c_m$　$c_m=5c_{m+1}>c_{m+1}$ が成立。

以上により　$a_m:b_m:c_m=3:4:5$ または $a_m:b_m:c_m=4:3:5$ ……(答)