1992 年京大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

(1)

$5\theta=\pi$ とすると　$3\theta=\pi-2\theta$　$\therefore \sin 3\theta=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta$

したがって　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{5}$ ……(答)

(2)

$\sin 3\theta=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\sin 3\theta=m\sin 2\theta+n\sin\theta=\sin\theta(2m\cos\theta+n)$ とすると

$3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin\theta(2m\cos\theta+n)$

$\sin\theta(3-4\sin^2\theta-2m\cos\theta-n)=\sin\theta(4\cos^2\theta-2m\cos\theta-n-1)=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta\neq 0$ であるから　$\therefore 4\cos^2\theta-2m\cos\theta-n-1=0$

$0<\cos\theta<1$ であるから、$4t^2-2mt-n-1=0$ の $0<t<1$ である解を考えると　$t=\dfrac{m+\sqrt{m^2+4n+4}}{4}<1$

$\sqrt{m^2+4n+4}\geqq 2$ であるから、$m<2$ でなければならず、$m=0,\ 1$ に限られる。

$m=0$ のとき　$t=\dfrac{\sqrt{4n+4}}{4}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{2}<1$　$n+1<4$　$n<3$　$\therefore n=0,\ 1,\ 2$

$n=0$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$　$n=1$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$

$n=2$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$m=1$ のとき　$t=\dfrac{1+\sqrt{4n+5}}{4}<1$　$4n+5<9$　$n<1$　$\therefore n=0$

$m=1,\ n=0$ のとき、$\sin 3\theta=\sin 2\theta$ であるから、(1) より　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{5}$

以上により　$\therefore (m,\ n,\ \theta)=\left(0,\ 0,\ \dfrac{\pi}{3}\right),\ \left(0,\ 1,\ \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(0,\ 2,\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(1,\ 0,\ \dfrac{\pi}{5}\right)$ ……(答)