1993年京大文 $\boxed{4}$

単位円 $C: x^2+y^2=1$ の部分集合 $C_1,\ C_2$ を、次のように定める。

$$C_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\},\ C_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C \,\middle|\, x\leqq 0,\ y\geqq 0\right\}$$

C_1 を C_2 に移す一次変換 g を表す行列を、$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする。

C_1 に属する点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の、g による像は $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta+b\sin\theta\\ c\cos\theta+d\sin\theta\end{pmatrix}$

これは C 上の点であるから

$$\begin{aligned}
&(a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(c\cos\theta+d\sin\theta)^2\\
&\quad=(a^2+c^2)\cos^2\theta+(b^2+d^2)\sin^2\theta+2(ab+cd)\sin\theta\cos\theta\\
&\quad=(a^2+c^2)\frac{1+\cos 2\theta}{2}+(b^2+d^2)\frac{1-\cos 2\theta}{2}+(ab+cd)\sin 2\theta\\
&\quad=\frac{a^2+c^2+b^2+d^2}{2}+\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\cos 2\theta+(ab+cd)\sin 2\theta=1
\end{aligned}$$

$$\therefore (a^2+c^2+b^2+d^2-2)+(a^2+c^2-b^2-d^2)\cos 2\theta+2(ab+cd)\sin 2\theta=0$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である任意の θ について成立するには

$a^2+c^2+b^2+d^2=2$ ——① $\quad a^2+c^2=b^2+d^2$ ——② $\quad ab+cd=0$ ——③

①、②より $a^2+c^2=b^2+d^2=1$ であるから、$a=\cos\alpha,\ c=\sin\alpha,\ b=\cos\beta,\ d=\sin\beta$ とおける。

③に代入すると $\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\cos(\beta-\alpha)=0$ $\quad\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$ $\quad\therefore\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$

このうち、$\cos\beta,\ \sin\beta$ が相違なるものを考えると、$\beta=\alpha\pm\dfrac{\pi}{2}$ で十分であり、

$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\beta=-\sin\alpha,\ \sin\beta=\cos\alpha$ $\quad\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\beta=\sin\alpha,\ \sin\beta=-\cos\alpha$

A は、$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ のいずれかの形になる。$0\leqq\alpha<2\pi$ で考える。

$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ のとき、g は原点中心の α 回転を表すから

C_1 に属する点 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の像が C_2 に属するには $\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$。

C_1 に属する点 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の像が C_2 に属するには $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ しかあり得ないから $\quad\therefore A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad g$ は原点中心の $\dfrac{\pi}{2}$ 回転であるから、確かに C_1 を C_2 に移す。

$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ のとき、g は x 軸に関する対称移動と、原点中心の α 回転の合成変換を表すから

C_1 に属する点 $\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ の像が C_2 に属するには　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$。

C_1 に属する点 $\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ の像が C_2 に属するには　$\pi\leqq\alpha\leqq\dfrac{3}{2}\pi$。

$\alpha=\pi$ しかあり得ないから　$\therefore A=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$　g は y 軸に関する対称移動であるから、確かに C_1 を C_2 に移す。

以上により、$A=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が求められた。

$\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ より、E_1 に属する任意の点は、$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ による一次変換で C_1 に属する点に移る。

$\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ より、C_2 に属する任意の点は、$\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ による一次変換で E_2 に属する点に移る。

$\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ より

一次変換 f を表すすべての行列は　$\therefore\begin{pmatrix}0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ……(答)

※ C_1 を C_2 に移す一次変換は容易に予想できるが、きちんと論証するのは面倒である。