1993 年京大後期理 $\boxed{4}$

$a^x \geqq ax$ のとき　$x\log a \geqq \log(ax) = \log x + \log a$

$f(x) = x\log a - \log x - \log a$ とすると　$f'(x) = \log a - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\log a}{x}\left(x - \dfrac{1}{\log a}\right)$

$0 < a \leqq 1$ のとき、$\log a \leqq 0$ であり、$x > 0$ において $f'(x) < 0$

$f(x)$ は単調減少であり、$f(1) = 0$ であるから、すべての $x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ とはならない。

$1 < a$ のとき、$f(x)$ の増減は右の通りで、$x = \dfrac{1}{\log a}$ のとき極小となる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\log a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{\log a}\right) = 1 - \log\left(\frac{1}{\log a}\right) - \log a = 1 + \log(\log a) - \log a = \log\left(\frac{e\log a}{a}\right)$$

すべての $x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ となるには、$\log\left(\dfrac{e\log a}{a}\right) \geqq 0$ であるから

$$\frac{e\log a}{a} \geqq 1 \quad \therefore e\log a - a \geqq 0$$

$g(a) = e\log a - a$ とすると　$g'(a) = \dfrac{e}{a} - 1 = \dfrac{e - a}{a}$

$g(a)$ の増減は右の通りで、$a = e$ のとき極大値 0 を持つ。

すなわち、$e\log a - a \geqq 0$ を満たす a は、$a = e$ のみである。

a	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$

以上により、題意を満たす a は　$\therefore a = e$　……(答)

※ $y = e^x$ と $y = ex$ は、$x = 1$ において接している。