1993 年京大後期理 $\boxed{6}$

$\dfrac{a_1x+b_1}{x+c_1}>\dfrac{a_2x+b_2}{x+c_2}$ が成り立つとき、両辺に $(x+c_1)^2(x+c_2)^2$ をかけて整理すると

$$(x+c_1)(x+c_2)^2(a_1x+b_1)-(x+c_1)^2(x+c_2)(a_2x+b_2)>0$$
$$(x+c_1)(x+c_2)\{(x+c_2)(a_1x+b_1)-(x+c_1)(a_2x+b_2)\}>0$$
$$(x+c_1)(x+c_2)\{(a_1-a_2)x^2+(a_1c_2-a_2c_1+b_1-b_2)x+b_1c_2-b_2c_1\}>0 \quad \text{——①}$$

$c_1<c_2$ のとき

$f(x)=(a_1-a_2)x^2+(a_1c_2-a_2c_1+b_1-b_2)x+b_1c_2-b_2c_1$ とすると

$-c_2<x<-c_1$ のとき　$(x+c_1)(x+c_2)<0$ であるから　$f(x)<0$

$x<-c_2,\ -c_1<x$ のとき　$(x+c_1)(x+c_2)>0$ であるから　$f(x)>0$

$x\neq -c_1,\ -c_2$ であるすべての実数 x において、$(x+c_1)(x+c_2)$ と $f(x)$ の符号が一致するから、

$a_1-a_2>0,\ f(-c_1)=f(-c_2)=0$ が成り立つ必要がある。

$$f(-c_1)=(a_1-a_2){c_1}^2-(a_1c_2-a_2c_1+b_1-b_2)c_1+b_1c_2-b_2c_1$$
$$=a_1{c_1}^2-a_2{c_1}^2-a_1c_1c_2+a_2{c_1}^2-b_1c_1+b_2c_1+b_1c_2-b_2c_1=a_1{c_1}^2-a_1c_1c_2-b_1c_1+b_1c_2$$
$$=a_1c_1(c_1-c_2)-b_1(c_1-c_2)=(a_1c_1-b_1)(c_1-c_2)$$
$$f(-c_2)=(a_1-a_2){c_2}^2-(a_1c_2-a_2c_1+b_1-b_2)c_2+b_1c_2-b_2c_1$$
$$=a_1{c_2}^2-a_2{c_2}^2-a_1{c_2}^2+a_2c_1c_2-b_1c_2+b_2c_2+b_1c_2-b_2c_1=a_2c_1c_2-a_2{c_2}^2-b_2c_1+b_2c_2$$
$$=a_1c_2(c_1-c_2)-b_2(c_1-c_2)=(a_2c_2-b_2)(c_1-c_2)$$

$c_1\neq c_2$ であるから、$f(-c_1)=f(-c_2)=0$ となる条件は　$a_1c_1-b_1=0,\ a_2c_2-b_2=0$　$\therefore b_1=a_1c_1,\ b_2=a_2c_2$

このとき、$\dfrac{a_1x+b_1}{x+c_1}=a_1,\ \dfrac{a_2x+b_2}{x+c_2}=a_2$ であり、$a_1>a_2$ より $\dfrac{a_1x+b_1}{x+c_1}>\dfrac{a_2x+b_2}{x+c_2}$ が成立。

$c_2<c_1$ としても同様である。

$c_1=c_2$ のとき　①は

$$(x+c_1)^2\{(a_1-a_2)x^2+(a_1c_1-a_2c_1+b_1-b_2)x+b_1c_1-b_2c_1\}=(x+c_1)^3\{(a_1-a_2)x+b_1-b_2\}>0$$

$x<-c_1$ のとき　$(x+c_1)^3<0$ であるから　$(a_1-a_2)x+b_1-b_2<0$

$-c_1<x$ のとき　$(x+c_1)^3>0$ であるから　$(a_1-a_2)x+b_1-b_2>0$

$x\neq -c_1$ であるすべての実数 x において、$(x+c_1)^3$ と $(a_1-a_2)x+b_1-b_2$ の符号が一致するから、

$a_1-a_2>0,\ -(a_1-a_2)c_1+b_1-b_2=0$ が成り立つ必要がある。　$\therefore c_1=c_2=\dfrac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$

このとき、$\dfrac{a_1x+b_1}{x+c_1}-\dfrac{a_2x+b_2}{x+c_2}=\dfrac{(a_1-a_2)x+b_1-b_2}{x+\dfrac{b_1-b_1}{a_1-a_2}}=a_1-a_2>0$ であり、$\dfrac{a_1x+b_1}{x+c_1}>\dfrac{a_2x+b_2}{x+c_2}$ が成立。

以上まとめて　$a_1>a_2$ かつ $b_1=a_1c_1$ かつ $b_2=a_2c_2$　または　$a_1>a_2$ かつ $c_1=c_2=\dfrac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$　……(答)