1993年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$0 \leqq x \leqq 1$ において、$1 \leqq e^{x^2} \leqq e$ であるから　$0 \leqq xe^{x^2} \leqq e$　$0 \leqq (1+x)^{-n} xe^{x^2} \leqq e(1+x)^{-n}$

したがって　$\therefore b_n \leqq e \cdot \int_0^1 (1+x)^{-n} dx$　(証明終)

$n \to \infty$ について考えるので、n は十分に大きいとしてよい。

$$e \cdot \int_0^1 (1+x)^{-n} dx = e\left[-\frac{(1+x)^{-(n-1)}}{n-1}\right]_0^1 = \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \therefore \lim_{n\to\infty} e \cdot \int_0^1 (1+x)^{-n} dx = 0$$

$0 \leqq b_n \leqq e \cdot \int_0^1 (1+x)^{-n} dx$ であるから、はさみうちの原理より　$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = 0$　……(答)

(2)

$$a_n = \int_0^1 (1+x)^{-n-1} e^{x^2} dx = \int_0^1 \left\{-\frac{(1+x)^{-n}}{n}\right\}' e^{x^2} dx = \left[-\frac{(1+x)^{-n}}{n} e^{x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 (1+x)^{-n} (e^{x^2})' dx$$

$$= -\frac{e}{n2^n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\int_0^1 (1+x)^{-n} xe^{x^2} dx = -\frac{e}{n2^n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} b_n$$

$$na_n = -\frac{e}{2^n} + 1 + 2b_n$$

(1)より、$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから　$\therefore \lim_{n\to\infty} na_n = 1$　……(答)