1993年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とする。$\int_x^{x+1}f(t)dt=cf(x)$ の両辺を x で微分すると

$$f(x+1)-f(x)=cf'(x)$$

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=a_n\left\{(x+1)^n-x^n\right\}+a_{n-1}\left\{(x+1)^{n-1}-x^{n-1}\right\}+\cdots+a_2\left\{(x+1)^2-x^2\right\}+a_1\left\{(x+1)-x\right\}\\&=a_n({}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_{n-2}x^{n-2}+\cdots+{}_nC_1x+{}_nC_0)\\&\quad+a_{n-1}({}_{n-1}C_{n-2}x^{n-2}+{}_{n-1}C_{n-3}x^{n-3}+\cdots+{}_{n-1}C_1x+{}_{n-1}C_0)+\cdots+a_2(2x+1)+a_1\\&={}_nC_{n-1}a_nx^{n-1}+({}_nC_{n-2}a_n+{}_{n-1}C_{n-2}a_{n-1})x^{n-2}+\cdots\\&\quad+({}_nC_1a_n+{}_{n-1}C_1a_{n-1}+\cdots+{}_2C_1a_2)x+({}_nC_0a_n+{}_{n-1}C_0a_{n-1}+\cdots+{}_2C_0a_2+{}_1C_0a_1)\end{aligned}$$

$$cf'(x)=nca_nx^{n-1}+(n-1)ca_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2ca_2x+ca_1$$

$f(x+1)-f(x)=cf'(x)$ がすべての x について成り立つとき、係数を比較すると

$$\begin{aligned}&na_n=nca_n\\&{}_nC_{n-2}a_n+(n-1)a_{n-1}=(n-1)ca_{n-1}\\&{}_nC_{n-3}a_n+{}_{n-1}C_{n-3}a_{n-1}+(n-2)a_{n-2}=(n-2)ca_{n-2}\\&\vdots\\&{}_nC_1a_n+{}_{n-1}C_1a_{n-1}+\cdots+{}_3C_1a_3+2a_2=2ca_2\\&{}_nC_0a_n+{}_{n-1}C_0a_{n-1}+\cdots+{}_2C_0a_2+a_1=ca_1\end{aligned}$$

$c=1$ のとき

2番目の式より　${}_nC_{n-2}a_n=0$　$\therefore a_n=0$　3番目の式より　${}_{n-1}C_{n-3}a_{n-1}=0$　$\therefore a_{n-1}=0$

以下順次、${}_{n-2}C_{n-4}a_{n-2}=0,\ \cdots,\ {}_3C_1a_3=0,\ {}_2C_0a_2=0$ より、$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=0$ である。

少なくとも $n\leqq 1$ がわかったので、$f(x)=a_1x+a_0$ とすると

$$\int_x^{x+1}f(t)dt=\left[\frac{a_1}{2}x^2+a_0x\right]_x^{x+1}=\frac{a_1}{2}(2x+1)+a_0=a_1x+\frac{a_1}{2}+a_0=f(x)=a_1x+a_0$$

すべての x について成り立つには、$\frac{a_1}{2}=0$ で、結局 $a_1=0$。

$c\neq 1$ のとき

1番目の式より　$\therefore a_n=0$　2番目の式より　$(n-1)a_{n-1}=(n-1)ca_{n-1}$　$\therefore a_{n-1}=0$

以下順次、$(n-2)a_{n-2}=(n-2)ca_{n-2},\ \cdots,\ 2a_2=2ca_2,\ a_1=ca_1$ より、$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ である。

以上により、いずれにしても、$f(x)$ は定数である。(証明終)

なお、$c=1$ のとき、$f(x)=a_0$ は任意の定数であり、$c\neq 1$ のとき、$f(x)=0$ に限られる。