

1994 年京大後期文 2

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$

両辺に A^n をかけると $A^{n+2} - (a+d)A^{n+1} + (ad-bc)A^n = O$

したがって、左下の成分について $\therefore c_{n+2} - (a+d)c_{n+1} + (ad-bc)c_n = 0$ (証明終)

(2)

$k \geq 2$ とする。

(1) より、任意の自然数 k について $c_{k+2} = (a+d)c_{k+1} - (ad-bc)c_k$

c_k と c_{k+1} が p で割り切れるとき、 c_{k+2} は p で割り切れるのは明らかである。

c_{k+1} と c_{k+2} が p で割り切れるとき、 c_{k+3} は p で割り切れる。

以下帰納的に、 c_{k+4}, c_{k+5}, \dots は p で割り切れることが、順次わかる。

また、 $c_{k+1} - (a+d)c_k = -(ad-bc)c_{k-1}$ より、 $ad-bc$ は p で割り切れないから、

c_k と c_{k+1} が p で割り切れるとき、 c_{k-1} は p で割り切れる。

c_k と c_{k-1} が p で割り切れるとき、 c_{k-2} は p で割り切れる。

以下帰納的に、 c_{k-3}, \dots, c_2, c_1 は p で割り切れることが、順次わかる。

c_1 と c_2 が p で割り切れるとき、以下帰納的に、 c_3, c_4, \dots は p で割り切れることが、順次わかる。

以上により、すべての自然数 n について、 c_n は p で割り切れる。(証明終)