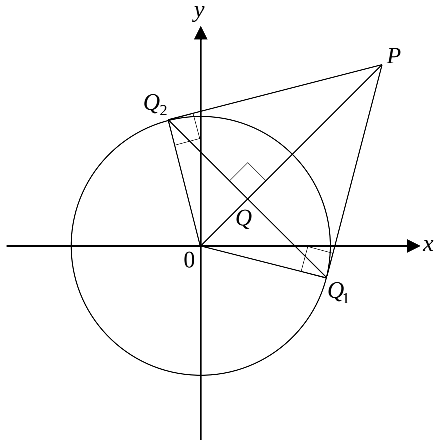
1994年京大後期文 $\boxed{3}$



$\triangle OQ_1P \backsim \triangle OQQ_1$ より　$OP : OQ_1 = OQ_1 : OQ$　$OP \cdot OQ = OQ_1{}^2$

$OQ_1 = 1,\ OP = \sqrt{a^2+b^2}$ より　$\therefore OQ = \dfrac{OQ_1{}^2}{OP} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{OQ}{OP}\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\overrightarrow{OP}$ であるから、

Q の座標は　$\therefore \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

$u = \dfrac{a}{a^2+b^2},\ v = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ とすると　$u^2+v^2 = \dfrac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}$

P は単位円 C の外部にあるから、$a^2+b^2>1$ より　$\therefore u^2+v^2<1$ ——①

$u=(u^2+v^2)a,\ v=(u^2+v^2)b$ より　$\therefore a = \dfrac{u}{u^2+v^2},\ b = \dfrac{v}{u^2+v^2}$

P は $x(x-y+1)<0$ を満たすから、代入すると

$$\frac{u}{u^2+v^2}\cdot\left(\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}+1\right)<0 \qquad u(u-v+u^2+v^2)<0$$

$u>0,\ u^2+v^2+u-v<0$　または　$u<0,\ u^2+v^2+u-v>0$

$u>0,\ \left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(v-\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{1}{2}$　または　$u<0,\ \left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(v-\dfrac{1}{2}\right)^2>\dfrac{1}{2}$ ——②

Q の存在範囲は①かつ②であるから、図示すると右図の通り。

境界線を含まない。