1994 年京大後期文 $\boxed{5}$

$g(x)=x^3+ax^2+x,\ h(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ とすると、 $f(x)=g'(x),\ g(x)=h'(x)$ であるから

$$\int_{-2}^{2}(x+2)f(x)dx=\int_{-2}^{2}(x+2)g'(x)dx=\Big[(x+2)g(x)\Big]_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}g(x)dx=4h'(2)-\left\{h(2)-h(-2)\right\}$$

$$4\int_{c}^{2}f(x)dx=4\int_{c}^{2}g'(x)dx=4\Big[g(x)\Big]_{c}^{2}=4h'(2)-4h'(c)$$

ここで、関数 $h(x)$ は $-2\leqq x\leqq 2$ において連続かつ微分可能であり、平均値の定理より

$$\frac{h(2)-h(-2)}{2+(-2)}=\frac{h(2)-h(-2)}{4}=h'(c)\qquad -2<c<2$$

であるような c が存在するので、

$$h(2)-h(-2)=4h'(c)\qquad -h(2)+h(-2)=-4h'(c)\qquad 4h'(2)-h(2)+h(-2)=4h'(2)-4h'(c)$$

$$\therefore \int_{-2}^{2}(x+2)f(x)dx=4\int_{c}^{2}f(x)dx$$

したがって、$-2<c<2$ の範囲で題意を満たす c が存在することが示された。（証明終）

（注）

$g(x)$ に対し、積分の平均値の定理を用いてもよい。

$$\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}g(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}g(x)dx=g(c)\qquad -2<c<2$$

$g(x)=h'(x)$ とすれば、 $\frac{h(2)-h(-2)}{4}=h'(c)$ を得る。