

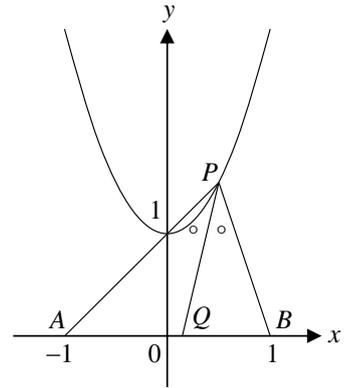
1994 年京大理 4

$AQ:QB=AP:BP$ であるから

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{(t-1)^2 + (2t^2+1)^2}}{\sqrt{(t+1)^2 + (2t^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{4t^4 + 5t^2 - 2t + 2}{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2}} = \sqrt{1 - \frac{4t}{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2}}$$

$f(t) = 1 - \frac{4t}{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2}$ とすると

$$\begin{aligned} f'(t) &= -4 \cdot \frac{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2 - t(16t^3 + 10t + 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2} = \frac{4(12t^4 + 5t^2 - 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2} \\ &= \frac{4(4t^2 - 1)(3t^2 + 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2} = \frac{4(2t+1)(2t-1)(3t^2 + 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2} \end{aligned}$$



$f(t)$ の増減は右の通り。

極大値は $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{9}{5}$ 極小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}}{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{5}{9}$

t	...	$-\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗		↘		↗

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{\frac{4}{t^3}}{4 + \frac{5}{t^2} + \frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^4}} \right) = 1$ であるから、 $f(t)$ の最大値は $\frac{9}{5}$ 、最小値は $\frac{5}{9}$

したがって、 $\frac{QB}{AQ} = \sqrt{f(t)}$ の最大値は $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 、最小値は $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ……(答)