1994年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)

$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=8,\ a_5=13,\ a_6=21,\ a_7=34,\ a_8=55,\ a_9=89$

$b_0=1,\ b_1=2,\ b_2=0,\ b_3=2,\ b_4=2,\ b_5=1,\ b_6=0,\ b_7=1,\ b_8=1,\ b_9=2$ ……(答)

(2)

b_{n+2}は、$b_{n+1}+b_n$を3で割った余りであり、数列b_nは周期8で繰り返すことがわかる。
すなわち、$b_{n+8}=b_n$である。

$c_{n+8}=c_n+(b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+7}+b_{n+8})$であり、

$b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+7}+b_{n+8}=b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+7}+b_n=b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+6}+b_{n+7}$

$\therefore b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+7}+b_{n+8}=b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+6}+b_{n+7}$

これを繰り返し用いると　$\therefore b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+7}+b_{n+8}=b_0+b_1+\cdots+b_6+b_7=c_7$

したがって　$\therefore c_{n+8}=c_n+c_7$　(証明終)

(3)

$c_0=1,\ c_1=3,\ c_2=3,\ c_3=5,\ c_4=7,\ c_5=8,\ c_6=8,\ c_7=9$

(2)より、$k\geqq 0,\ 0\leqq l\leqq 7$として　$c_{8(k+1)+l}=c_{8k+l}+9$　$\therefore c_{8k+l}=c_l+9k$

$n=8k+l$とすると

$c_n-(n+1)=c_l+9k-(8k+l+1)=c_l+k-l-1\geqq c_l-l-1$

ここで

$c_0-0-1=0,\ c_1-1-1=1,\ c_2-2-1=0,\ c_3-3-1=1,$

$c_4-4-1=2,\ c_5-5-1=2,\ c_6-6-1=1,\ c_7-7-1=1$

より、$0\leqq l\leqq 7$について$c_l-l-1\geqq 0$が成立。

したがって、すべてのnについて　$c_n-(n+1)\geqq 0$　$\therefore n+1\leqq c_n$

$$\frac{3}{2}(n+1)-c_n=\frac{3}{2}(8k+l+1)-c_l-9k=3k+\frac{3}{2}(l+1)-c_l\geqq\frac{3}{2}(l+1)-c_l$$

ここで

$$\frac{3}{2}(0+1)-c_0=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}(1+1)-c_1=0,\ \frac{3}{2}(2+1)-c_2=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}(3+1)-c_3=1,$$

$$\frac{3}{2}(4+1)-c_4=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}(5+1)-c_5=1,\ \frac{3}{2}(6+1)-c_6=\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}(7+1)-c_7=3$$

より、$0\leqq l\leqq 7$について$\frac{3}{2}(l+1)-c_l\geqq 0$が成立。

したがって、すべてのnについて　$\frac{3}{2}(n+1)-c_n\geqq 0$　$\therefore c_n\leqq\frac{3}{2}(n+1)$

以上により　$\therefore n+1\leqq c_n\leqq\frac{3}{2}(n+1)$　(証明終)