

1995 年京大後期文 [3]

条件より $|p(-1)| = |a - b + c| \leq 1, |p(1)| = |a + b + c| \leq 1$ ——①

$b \geq 0$ より、 $p(1) - p(-1) = 2b \geq 0$ であり、 $-1 \leq p(-1) \leq p(1) \leq 1$ であるから

$$2 \geq p(1) - p(-1) = 2b \geq 0 \quad \therefore 0 \leq b \leq 1 \quad \text{——②}$$

$$|p(0)| = |c| \leq 1 \quad \text{より} \quad \therefore -1 \leq c \leq 1 \quad \text{——③}$$

$$q(-1) = p(-1), q(1) = p(1) \text{ であるから、①より} \quad \therefore |q(-1)| \leq 1, |q(1)| \leq 1 \quad \text{——④}$$

$c = 0$ のとき、 $y = q(x)$ は直線であり、④より $-1 \leq x \leq 1$ において $|q(x)| \leq 1$ である。

$c > 0$ のとき $y = q(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}$ は、下に凸の放物線である。軸 $-\frac{b}{2c} \leq 0$ であるから

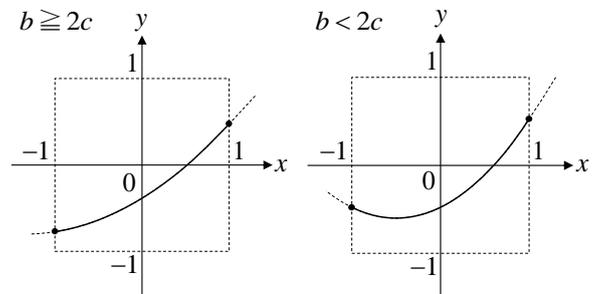
$$-\frac{b}{2c} \leq -1, b \geq 2c \text{ のとき}$$

④より $-1 \leq x \leq 1$ において $|q(x)| \leq 1$ である。

$$-1 < -\frac{b}{2c} \leq 0, b < 2c \text{ のとき}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における $q(x)$ の最小値は $m = a - \frac{b^2}{4c}$ 。

$$m > a - \frac{(2c)^2}{4c} = a - c \text{ であり、} a \geq 0, 0 < c \leq 1 \text{ より} \quad \therefore m > -1$$



以上により、 $-1 \leq x \leq 1$ において $|q(x)| \leq 1$ が示された。(証明終)

※後期理系 [3] は、 $c \geq 0$ という限定がない。