1995 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

E 上の点は、$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおけるので、C 上の点 $(x,\ y)$ は

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$　$x = a\cos\theta - b\sin\theta$ ——①　$y = b\sin\theta$ ——②

と表せる。①より　$x = a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)\ \left(\tan\alpha = \dfrac{b}{a},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ここで、E は $(1, 1)$ を通るので　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2} = 1$　$\sqrt{a^2+b^2} = ab$　$\therefore x = ab\cos(\theta+\alpha)$

また、$\dfrac{1}{b^2} = 1-\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2-1}{a^2} > 0$ より、$a>1$ であるから

$b^2 = \dfrac{a^2}{a^2-1}$　$a^2b^2 = \dfrac{a^4}{a^2-1}$　$ab = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{a^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

相加平均・相乗平均の関係より　$ab \geqq 2\sqrt{\sqrt{a^2-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}} = 2$　等号は、$a^2-1=1$、$a=b=\sqrt{2}$ のとき成立。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で、$x = ab\cos(\theta+\alpha) = t$ とすると　$\cos(\theta+\alpha) = \dfrac{t}{ab}$ ——③

$|t|<2,\ ab \geqq 2$ であるから　$\therefore \left|\dfrac{t}{ab}\right| < 1$　したがって、③を満たす相違なる θ が、2 つ存在する。

すなわち、直線 $x=t$ は、異なる 2 点 $A_1,\ A_2$ で、C と交わる。(証明終)

(2)

①、②より、$\cos\theta = \dfrac{x+y}{a},\ \sin\theta = \dfrac{y}{b}$ であるから　$\cos^2\theta+\sin^2\theta = \dfrac{(x+y)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ——④

④より　$(x+y)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$　$x+y = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$　$\therefore x = -y\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ ——⑤

②より、$-b \leqq y \leqq b$ であるが、$y=\pm b$ とすると、$x=\mp b$ となる。

2 点 $A_1,\ A_2$ のうち、一方の y 座標が b か $-b$ であるとき、$t^2=b^2$ となるから、条件に反する。

したがって、$-b<y<b$ であり、このような y を定めれば、⑤により相違なる x が 2 つ決まる。

すなわち、(1)の $A_1,\ A_2$ とそれぞれ同じ y 座標をもつ点 $B_1,\ B_2$ が、C 上にある。(証明終)

次に、④を整理すると　$b^2(x+y)^2+a^2y^2 = a^2b^2$　$b^2x^2+2b^2yx+(a^2+b^2)y^2-a^2b^2=0$

$a^2+b^2=a^2b^2$ より　$b^2x^2+2b^2yx+a^2b^2(y^2-1)=0$　$\therefore x^2+2yx+a^2(y^2-1)=0$ ——⑥

$A_1,\ A_2$ の y 座標を、それぞれ $y_1,\ y_2$ とする。⑥より

$x^2+2y_1x+a^2({y_1}^2-1)=0$ ——⑦　$x^2+2y_2x+a^2({y_2}^2-1)=0$ ——⑧

x に関する二次方程式⑦と⑧は、共通解 $x=t$ を持つ。⑦と⑧の、$x=t$ 以外の解を、$x_1,\ x_2$ とすると

解と係数の関係より　$x_1+t=-2y_1,\ x_2+t=-2y_2$　辺々引くと　$\therefore x_1-x_2=-2(y_1-y_2)$

これより　$B_1B_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{5}|y_1-y_2| = \sqrt{5}A_1A_2$　$\therefore \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \sqrt{5}$　……(答)