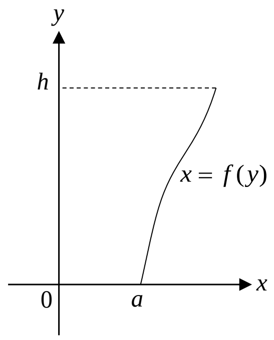
1995 年京大理 $\boxed{6}$

t 時間後の水面の高さを、$H(t)$ と表す。

t 時間後の水面の面積は、$\pi\{f(H(t))\}^2$ であるから　$\pi\{f(H(t))\}^2 = Vt + \pi a^2$ ——①



t 時間後の容器内の水の体積は、$Vt = \pi\int_0^{H(t)}\{f(y)\}^2 dy$ であるから、

両辺を t で微分すると　$V = \pi\{f(H(t))\}^2 \cdot H'(t)$ ——②

①、②より　$H'(t) = \dfrac{V}{Vt + \pi a^2}$　$H(t) = \log(Vt + \pi a^2) + C$

$h(0) = 0$ より　$\log(\pi a^2) + C = 0$　$\therefore C = -\log(\pi a^2)$　$\therefore H(t) = \log\dfrac{Vt + \pi a^2}{\pi a^2}$

①より、$H(t)$ を y で置き換えると　$y = \log\dfrac{\pi\{f(y)\}^2}{\pi a^2} = \log\dfrac{\{f(y)\}^2}{a^2}$　$\dfrac{\{f(y)\}^2}{a^2} = e^y$　$\{f(y)\}^2 = a^2e^y$

$f(y) > 0$ より　$f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$　これは $f(0) = a$ を満たす。　$\therefore f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$ ……(答)

$H(T) = h$ であるから

$h = \log\dfrac{VT + \pi a^2}{\pi a^2}$　$\dfrac{VT + \pi a^2}{\pi a^2} = e^h$　$VT + \pi a^2 = \pi a^2 e^h$　$VT = \pi a^2(e^h - 1)$　$\therefore T = \dfrac{\pi a^2(e^h - 1)}{V}$ ……(答)

あるいは、$VT = \pi\int_0^h\{f(y)\}^2 dy$ より

$VT = \pi a^2\int_0^h e^y dy = \pi a^2\left[e^y\right]_0^h = \pi a^2(e^h - 1)$　$\therefore T = \dfrac{\pi a^2(e^h - 1)}{V}$ ……(答)