1995 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}\ (r>0)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar\cos\theta+br\sin\theta \\ ar\sin\theta \end{pmatrix}$　$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix} ar\cos\theta+br\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|ar\cos\theta+br\sin\theta|}{r}=|a\cos\theta+b\sin\theta|=\sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(\theta+\alpha)|$$

ただし、$\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。$\dfrac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値が、2 であるから

$$\sqrt{a^2+b^2}=2 \quad \therefore a^2+b^2=4$$

次に、

$$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{\sqrt{(ar\cos\theta+br\sin\theta)^2+a^2r^2\sin^2\theta}}{r}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta+(a^2+b^2)\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{b^2\sin^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta+a^2}=\sqrt{b^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+ab\sin 2\theta+4-b^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2ab\sin 2\theta-b^2\cos 2\theta+8-b^2}$$

ここで、

$$2ab\sin 2\theta-b^2\cos 2\theta=\sqrt{4a^2b^2+b^4}\sin(2\theta-\beta)=\sqrt{4(4-b^2)b^2+b^4}\sin(2\theta-\beta)=\sqrt{16b^2-3b^4}\sin(2\theta-\beta)$$

ただし、$\cos\beta=\dfrac{2ab}{\sqrt{16b^2-3b^4}}$, $\sin\beta=\dfrac{b^2}{\sqrt{16b^2-3b^4}}$ である。条件より

$$\frac{\sqrt{8-b^2+\sqrt{16b^2-3b^4}}}{\sqrt{8-b^2-\sqrt{16b^2-3b^4}}}=3 \quad 8-b^2+\sqrt{16b^2-3b^4}=9(8-b^2)-9\sqrt{16b^2-3b^4}$$

$$8(8-b^2)=10\sqrt{16b^2-3b^4} \quad 16(8-b^2)^2=25(16b^2-3b^4)$$

$$16(b^4-16b^2+64)=25(16b^2-3b^4) \quad 91b^4-656b^2+1024=(7b^2-16)(13b^2-64)=0$$

$b^2 \leqq 4$ より　$\therefore b^2=\dfrac{16}{7},\ a^2=\dfrac{12}{7}$

求める $(a,\ b)$ は　$\therefore (a,\ b)=\left(\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7},\ \pm\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\right)$（複号任意）……(答)