1996年京大後期文 $\boxed{2}$

(1)

$f(\alpha)=\alpha^n+pa_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+pa_i\alpha^i+\cdots+pa_0=0$ より　$-\alpha^n=p(a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_i\alpha^i+\cdots+a_0)$ ——①

①の右辺は p で割り切れるから、①の左辺 $-\alpha^n$ も p で割り切れる。

すなわち、α^n が p で割り切れ、α が p で割り切れる。（証明終）

(2)

a_0 が p で割り切れず、なおかつ $f(x)=0$ が整数解 α を持つと仮定する。

このとき、$f(\alpha)=0$ より　$pa_0=-(\alpha^n+pa_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+pa_1\alpha)$

(1) より、α は p で割り切れるから、両辺を p で割ると　$a_0=-\left(\dfrac{\alpha}{p}\cdot\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha\right)$ ——②

$n\geqq 2$ および α は p で割り切れることから、②の右辺は p で割り切れる。

ところが、a_0 は p で割り切れないから、矛盾する。

したがって仮定は誤りであり、a_0 が p で割り切れなければ、$f(x)=0$ は整数解を持たない。（証明終）