1996年京大後期文$\boxed{4}$

$x>0,\ y>0$であるから、$-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{x-y}{x+y}\leqq\dfrac{1}{2}$より

$-x-y\leqq 2x-2y\leqq x+y\qquad -\dfrac{x}{y}-1\leqq 2\cdot\dfrac{x}{y}-2\leqq\dfrac{x}{y}+1\qquad \therefore\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{x}{y}\leqq 3$

$x^3-3a^2xy^2+2y^3\geqq 0$の両辺を、y^3で割ると　$\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-3a^2\cdot\dfrac{x}{y}+2\geqq 0$

これより、$t=\dfrac{x}{y}$とおくと、$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 3$の範囲で、$t^3-3a^2t+2\geqq 0$が成り立てばよい。

$f(t)=t^3-3a^2t+2$とすると、

$a=0$のとき　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 3$において、$f(t)=t^3+2>0$は成立。

$a>0$のとき　$f'(t)=3t^2-3a^2=3(t+a)(t-a)$
$t>0$における増減は、右の通り。

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(t)$の$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 3$における最小値は、$f\left(\dfrac{1}{3}\right),\ f(3),\ f(a)$のいずれかであるから、

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)\geqq 0$かつ$f(3)\geqq 0$かつ$f(a)\geqq 0$であればよい。

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}-a^2+2=\dfrac{55}{27}-a^2\geqq 0\qquad\therefore 0<a\leqq\dfrac{\sqrt{165}}{9}\qquad f(3)=29-9a^2\geqq 0\qquad\therefore 0<a\leqq\dfrac{\sqrt{29}}{3}$

$f(a)=2(1-a^3)\geqq 0\qquad\therefore 0<a\leqq 1$

結局、$0<a\leqq 1$であるから、$a=0$と合わせて　$\therefore 0\leqq a\leqq 1$　……(答)