1996 年京大文 $\boxed{3}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$$

$$A^3=(a+d)A^2-(ad-bc)A=(a+d)^2A-(a+d)(ad-bc)E-(ad-bc)A$$
$$=\left\{(a+d)^2-(ad-bc)\right\}A-(a+d)(ad-bc)E=A$$

$$\left\{(a+d)^2-(ad-bc)-1\right\}A=(a+d)(ad-bc)E$$

$(a+d)(ad-bc)=0$ のとき　$(a+d)^2-(ad-bc)-1=0$ または $A=O$ であるから

$a+d=0$ のとき　$a=d=0$ しかあり得ないので　$bc-1=0$　$\therefore b=c=1$

$ad-bc=0$ のとき　$(a+d)^2-1=0$　$a+d=1$　$a=1,\ d=0$ または $a=0,\ d=1$

いずれにしても　$bc=0$　$b=0$ または $c=0$

$A=O$ のとき　$A^3=A$ は明らかである。

$(a+d)(ad-bc)\neq 0$ のとき　$(a+d)^2-(ad-bc)-1\neq 0$ であり、$A=kE$ と書ける。

$A^3=k^3E=A$　$(k^3-k)E=k(k+1)(k-1)E=O$　適するのは　$\therefore k=0,\ 1$

以上により、$b,\ c$ を任意の非負整数として

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$ ……(答)